مبادئ علم

الإحصاء

دكتور

إبراهيم على إبراهيم عبد ربه

كلية التجارة - جامعتى الأسكندرية وبيروت العربية

مبادئ علم

الإحصاء

الأستاذ الدكتور

إبراهيم على إبراهيم عبد ربه

كلية التجارة - جامعتى الإسكندرية وبيروت العربية

2003 / 2004

الدار الجامعية

٨٤ شارع زكريا غنيم "الابراهيمية" ت

ب ٣٥ الابراهيمية "رمل الاسكندرية"

e-mail:m20ibrahim@yahoo.com

٥٩٠٧٤٦٦ - ٥٩١٧٨٨٢

بسم الله الرحمن الرحيم

مقدمـــة

إذ ذادت أهمية علم الإحصاء فى الأونة الأخيرة، حتى أصبح من العلوم الأساسية التى لا غنى عنها فى مختلف البحوث والدراسات العلمية والتطبيقية فى المجالات الإقتصادية والإجتماعية، بل ساعدت على تحقيق التقدم والمتطور فى ميادين عديدة كالطلب والهندسة والزراعة، وكذلك فى مجال العلوم الإنسانية تعلم النفس والإقتصاد والإدارة والمحاسبة.

كما كان لتزايد إستخدام الأساليب الإحصائية أثراً فعالاً فى إتخاذ القرارات وإجراء عمليات التقييم على أسس علمية وموضوعية فى ظل تزايد التعقد فى العمليات الإقتصادية فى المشروعات الخاصة والعامة.

ونظراً لأن الدراسة الحديثة فى كليات ومعاهد الاقتصاد والتجارة تتطلب أن يلم الباحث والطالب بالقدر الملائم من الأساليب الإحصائية وتطبيقاتها فى المجالات الإدارية والإقتصادية والمحاسبية.

لذا تناولت الدراسة، تعريف علم الاحصاء، وطرق وأساليب جمع البيانات والمعلومات الاحصائية، وطرق عرضها وتصنيفها جدولياً وبيانياً، ومقاييس النزعة المركزية، ومقاييس التشتت المطلق والنسبى، ومنحنى لورنز ومقاييس الالتواء والعزوم والتفرطح المختلفة ومعاملات الانحدار والأرتباط والإقتران، بجانب الأرقام القياسية وتعديلها واختبارها، والسلاسل الزمنية بمكوناتها المختلفة كوسيلة هامة من وسائل التخطيط والتنبؤ.

وقد روعى فى هذا الكتاب فى طبعته الأخيرة المعدلة والمنقحة تقديم الأساليب الإحصائية فى صورة مبسطة وتطبيقية بحيث تكون عوناً للباحثين وطلاب كليات التجارة والإقتصاد.

وأخيراً نأمل أن يجد الباحث والطالب فى هذا المؤلف ما نرجوه له وما يرجوه لنفسه.

ونسأل الله العون والتوفيق ،،،

المؤلف

الفصل الأول

مقدمـــة وتـعـــاريـف

تطور مفهوم علم الإحصاء تدريجياً منذ القدم حتى وصل إلى ما هو عليه الآن من أسس ومبادئ ونظريات ثابته ومعروفه ، كما تلازمت زيادة أهميـة وإستخدام هذا العلم بتطور مفاهيمه ونظرياته فى مراحله المختلفة ، وذلك بفضل مساهمـة مجموعـة من العلماء والباحثين بأبحاثهم وخبراتهم القيمة فى هذا المجال ، هذا بجانب ما أسهمت به الجمعيات العلمية للاحصاء واصدارها لمجلات متخصصة فى هذا الشأن ، وأيضاً كأن لظهور وإنشاء الاقسام الاحصائية المتخصصة بالجامعات أثراً ملموساً وفعالاً فى تطور المعاهد العلمية ونظريات ذلك العلم وتطبيقاته فى معظم أو كل مجالات الحياة العلمية والعملية تقريباً .

١ ـ نشأة وتطور علم الإحصـاء :

بدأ مفهوم الإحصاء بمعنى الحصر والعد منذ قدماء المصريين ، حيث قاموا بحصر السكان، وثروة مصر، لأهداف سياسيه وإجتماعية ، ولم يختلف الأمر فى العصور الوسطى، حيث تم جمع الحقائق الخاصة بشئون الدولة ، وذلك بحصر أعداد السكان وثرواتهم ودخولهم لأسباب دفاعية وماليه محدوده كجبايه الضرائب ، لكن فى القرنين الأخيرين تطور الحال إلى ما يعرف بالحساب السياسى بالدولة فتناولت الإحصاءات الرقمية أعداد السكان واعداد المواليد والوفيات بها ، وإيرادات ونفقات الدولة ، هذا بجانب إنتاج الدولة من المحاصيل المختلفة ، وذلك لأهداف انمائيه ، ولتقديم الخدمات الضرورية للسكان فى مجالات متعددة كالزراعة والصحة والتعليم والإقتصاد والمساعدات الاجتماعية، ولا ننكر ماحدث أخيراً من تطور هائل فى علم الرياضيات لما له من أثر ايجابى وفعال على تطور الأسس الرياضية لعلم الإحصاء على أيدى علماء بارزين منهم جاوس، وبايز ، وباسكال، وبيرسون، وفيشر .... الخ ، وتحويله من فن إلى علم له أسسه ونظرياته ، كما كان لظهور الثورة الإدارية

والتخطيطيه في كثير من الدول فى القرن العشرين أثراً بالغاً فى إقتناع الخاصة والعامة من علماء ومسئولين بأهمية الحاجة إلى البيانات الإحصائيه ، والطرق الاحصائية ، والنظريات الإحصائية فى علوم ومجالات تطبيقية جديدة ، كعلوم الفلك ، والوراثة والأحياء، وعلوم الزراعة والصناعة والأقتصاد والتجارة ، والطب وعلم النفس .... الخ، كما كان للمزج بين علم الاحصاء وعلوم أخرى كادارة الأعمال والاقتصاد والزراعة والطب فى ظهور علوم أخرى كبحوث العمليات والإقتصاد القياسى ... الخ ، حيث تعتبر النظريات والطرق الإحصائية فى كل ما تقدم هى العامل المشترك فى محاولاتها لإتخاذ القرارات فى جميع أوجه نشاط إتخاذ القرارات فى المجالات التطبيقه السابقه .

وأنعكاساً لكل ما سبق فقد أيقنت كافه دول العالم والهيئات الدولية المختلفة بأهمية الإحصاء فى كافة المجالات، فسنت التشريعات لتنظيم العمليات والنشاط الإحصائى، بها، فأنشأت بها أجهزة مركزية، ومحلية متخصصة فى مجالات الإحصاء تصدر عنها نشرات إحصائية دورية تغطى كافة المجالات السكانية والإجتماعية والتجارية والصناعية والزراعية والصحية .... الخ .

٢ ـ تعريف علم الإحصاء :

يمكن تعريف علم الإحصاء ، بأنه العلم الذى يهتم بالدراسات الخاصة بالمجتمعات والظواهر الإحصائية المقيسه، (١) من حيث جمع وتسجيل الحقائق الخاصة بها ثم تنظيمها وتلخيصها بطريقه يسهل معه عرض هذه الحقائق وتحليلها بما يساعد على تفهم إتجاهاتها وعلاقتها ببعضها البعض ، بهدف تفهم حقيقة هذه الظواهر والمجتمعات وتلمس القوانين والنظريات التى تحكمها بما يساعد على الوصول إلى تحديد قيمتها فى الحاضر والتنبؤ بقيمتها فى المستقبل سواء تعلقت هذه الدراسات بظواهر علمية بحتة أو اقتصادية أو إجتماعية، أى أنه

---

(١) وهى الظواهر التى هى نفسها عبارة عن معلومات رقمية أو يمكن تحويلها إلى معلومات رقمية ، حيث أن المنهاج الاحصائى يبدأ أولاً بجمع المعلومات عن الظاهرة موضوع البحث فاذا لم تكن هذه المعلومات عبارة عن أرقام أو يمكن تحويلها الى أرقام يتعذر بذلك تطبيق المنهاج الاحصائى .

يعتبر علم إتخاذ القرارات الموضوعية فى ظل توافر معلومات محدودة بهدف التطبيق على كافة العلم الأخرى والتوصل إلي قرارات حكيمة تزيد من درجة الأطمئنان لمثل هذه القرارات.

٣ ـ مجالات ومراحل علم الإحصاء :

(أ) من التعريف السابق لعلم الإحصاء يتبين أن مجالات علم الإحصاء تنحصر فى مجالين :

أولهما : الإحصاء الوصفى (*Discriptive Statistics*) .

ويتضمن الطرق العلمية لجمع البيانات عن ظاهرة معينة ، وتسجيلها وتنظيمها وفق تصنيف محدد ، وعرضها سواء فى صورة جداول إحصائية أو رسوم بيانية أو هندسية، تمهيداً لوصف مثل هذه البيانات بمقاييس تعبر عن خصائصها الأساسية عن طريق حساب مقاييس النزعة المركزية ومقاييس التشتت ، وغيرها من المقاييس الأخرى .

ثانيهما : الإحصاء الإستدلالى أو الإستنتاجى (*Analytic Statistics*)

ويتضمن مجموعة الطرق العلمية والإحصائية التى تتناول تقدير معالم المجتمع بناء على البيانات الإحصائية التى تم جمعها من عينه مسحوبة من هذا المجتمع باستخدام نظرية الاحتمالات، وذلك وفق مفاهيم ونظريات محددة كنظرية التقدير estimatiom ، ونظرية إختبارات الفروض Test of hypotheses .

(ب) مراحل أو خطوات المنهاج الإحصائى [١]

أولاً : تحديد المشكلة ووضع الفروض .

ثانياً : جمع البيانات الإحصائية .

ثالثاً : تحديد وتبويب وعرض البيانات الإحصائية .

رابعاً : تحليل البيانات الإحصائية .

---

(١) يلاحظ أن خطوات هذا المنهاج لا تختلف عن خطوات المنهاج العلمى فى بحث أى مشكلة أيا كان مجالها.

خامساً : إستخلاص وتفسير وإستخدام النتائج الإحصائيـة .

وسنتناول فى هذا الجـزء كل من هذه المراحل بشئ من الإيجـاز تمهيـد لتناولها بالتفصيل فى الأجزاء اللاحقـه .

أولاً : تحديد المشكلة ووضع الفروض لحلها :

تبدأ العمليـة الإحصائيـة بمشاهدة الظواهر التى نرغب فى دراستها ، ومن هنا يتولد الإحساس بالمشكلة ووضع فرض مبدئى لتفسير الظاهرة موضـوع البحث[1] فإذا كانت المشكلة تروق للباحث ، فيتطلب الأمر منه تفسيرها وتحديد أبعادها وتصور الحلول الممكنة لها، ويتأتى ما سبق بوضع فرض مبدئى لتفسـير الظاهرة موضوع البحث لها؛ولا يتأتى له ذلك بالتعرف عليها وفحصـها من حيث نشأتها وأهمية دراستهـا، ونوع البيانات اللازمـة لدراستها وسبل تحليليها وإستخدام نتائجها، وباستخدام المفهوم السابق يسهل على الباحث تحديد البيانات الواجب عليه جمعها فى أسرع وقت وبأقل تكلفةمن ناحيـة، ثم تقرير الباحث إما القبول الجزئى أو الكلى للفرض المبدئى لتفسير الظاهرة أو رفضه والبحث عن فرض آخر بديل وذلك بوضع حدود جديدة للمشكلة وبيان الطريق إلى حلها من ناحية أخرى ويعتبر ما تقدم الخطوة الأولى فى أى بحث علمى.

ثانياً : جمع البيانات الاحصائيـة :

وسنهتم هنا بمصادر بيانات للمشكلة موضـوع البحـث، وهل سيتم الجمـع من مصادر غير مباشرة (تاريخيـه) أم من مصـادر مباشرة (ميدانية)، وفى الحالة الأخيـرة فهل يتم ذلك بأسلوب الحـصر الشامل أم بأسلوب العينات ، مع

---

(١) والفرض المبدئى، هو محاولة لفكرة محددة أو إقتراح تجريبى يتصل بطبيعة الظاهرة موضوع البحث، وهو يعتمد على براعة وخبرة الباحث فمثلاً ظاهرة البطالة بين العمال والخريجين ترجع مسبباتها المختلفة قد ترجع إما إلى مستويات الأسعار أو مستويات الأجور أو كميات النقد المتداول أو كميـة الإنتاج أو حركـة التصدير وربما توزيع الخريجين وبدراسـة هذه المسببات مجتمعة أو منفردة وأثر كل منها على مشكلة البطالة ستبين لنا أيهما اتصـالاً بموضوع البحث فنوليه أهتمامنا من حيث جمع البيانات عنه وتحليلها وقد تهمل الأخرى.

الأخذ فى الأعتبار طبيعة المجتمع موضوع الدراسة وطبيعة البيانات المطلوبة وحجمها والامكانيات المادية والبشرية والزمنية اللازمة لإعداد هذه الدراسة واخيراً الوسيلة المناسبة لجمع مثل هذه البيانات .

ثالثاً : تجهيز وتبويب وعرض البيانات الإحصائية :

وتتضمن هذه المرحلة بعد مراجعة كشوف البحث أو صحائف الإستبيان عمليه تجهيز وتبويب وعرض هذه البيانات وذلك بإجراء عمليات الترميز والتثقيب ومراجعتها اذا كان حجم البيانات كبيراً ـ والفرز والتبويب بطريقة تساعد على فهم مدلولها والاستفادة منها، ويكون ذلك بعرضها إما فى صورة جداول رقمية وتوضيحها فى صورة رسوم بيانيه أو أشكال هندسية مختلفة ، وتعتبر هذه المرحلة هامة وضرورية خاصة إذا كان مصدر البيانات لأنه يساعد فيما بعد على تحليلها.

رابعاً : تحليل وقياس البيانات الإحصائية :

وتتضمن هذه المرحلة إجراء عمليات التحليل المختلفة بطريقة تتفق وإحتياجات المشكلة موضوع الدراسة وذلك باستخدام بعض المقاييس الاحصائية التى تصف لنا توزيع الظاهرة موضوع البحث بطريقة مختصرة ، وكذا قياس درجة تباين أو عدم تجانس توزيع بيانات هذه الظاهرة ، بالإضافة إلى تحديد العلاقة أو درجتها واتجاهها بين ظاهرتين أو أكثر ، بجانب استخدام هذه العلاقة للتنبؤ بقيم متغير [1] بدلالة متغير آخراً أو عدة متغيرات أخرى ، كل ذلك حسب ما يتفق مع طبيعة المشكلة التى يتم دراستها ، وبمعنى آخر بإستخدام مقاييس النزعة المركزية ، ومقاييس التشتت والالتواء والإرتباط والانحدار .الخ.

خامساً : إستخلاص وتفسير واستخدام النتائج الإحصائية :

بإنتهاء مرحلة تحليل وقياس البيانات يصبح أمام الباحث الاحصائى نتائج رقمية محددة مقنعة ويتعين عليه بعد ذلك تفسير هذه النتائج بحكمه ومهارة

---

(١) المتغير الاحصائى هو ظاهرة ما تأخذ قيماً مختلفة أو صور مختلفة تبعاً للظروف المختلفة .

وموضوعيـة تتفق مع طبيعـة التحليل الاحصائى الذى تم إجراؤه ، وبالطبع فإن عمليـه التفسير المشار إليها لا تكون ذات طبيعـة إحصائيـة بحته ، ولكنها تحتاج أيضاً لخبرات ذات معرفـة علميـه وثيقـه بموضوع البحث الإساسى، كل ذلك بهدف التنبؤ أو التقرير والتحقيق للظاهرة موضوع البحث ، أى أنـه بعد وضع الباحث لفرض ما ، وقيامـه بدراسات متعددة لتحقيق فرضه ، يمكنه باستخدام الأساليب الاحصائيـة والرياضيـة والمنطقيه إستخلاص نتائج مختلفة عن موضوع بحثـه .

الفصــل الثــانى

جمـع البيانـات والمعلومات الإحصائيـة

يبدأ البحث الإحصائى سواء تعلق بظاهرة علميـة أو اقتصاديـة أو إجتماعيـة بقيام الباحث أو الجهـه المشرفـة على البحث بمناقشة البيانات والمعلومات اللازمة عن الظاهرة موضوع الدراسة، وبعد إستقرار الرأى على هذه البيانات تبدأ أهم وأخطر مرحلة إحصائية، وهى مرحلة جمع هذه البيانات، فإذا توافرت فيها الموضوعية والدقة والبعد عن الأخطاء انعكس ذلك فى دقة التحليل وصحة النتائج والإستنتاجات الإحصائية التى يحصل عليها الباحث أو الجهة المشرفة على البحث والعكس صحيح ، مع الأخذ فى الإعتبار الامكانيات الماديـة والعينيه والزمنيـة (الوقت اللازم للدراسة) المتوافرة لاجراء هذه الدراسة من القائمين عليه ومجال استخدام نتائجه ، لهذا كان علينا مناقشة كل ما يتعلق بمثل هذه البيانات (المعلومات) الاحصائيـة من حيث مصدرها ، وطبيعتها ، وطرق ووسائل جمعها وتكاليفها ..... الخ .

١ ـ مصادر البيانات الاحصائيـة : يمكن تقسيم مصادر البيانات الإحصائيـة إلى مصدرين أساسين :

أولاً : المصادر الأوليـة (التاريخيـة) : ويطلق على مصادر البيانات التى قامت بجمعها ونشرها بنفسها بعض الجهات والهيئات المحلية والمركزيـة حكوميـة أو غير حكوميـة سواء أكانت قوميـة أو دوليـة ، وتتعلق بالظاهرة موضوع الدراسة ، فمثلاً الوثائق والتقارير الدوريـة وغير الدوريـة التى تنشرها الشركات والوزارات المختلفة وأجهزة الإحصاء المركزيـة والهيئات الدوليه تعتبر مصادر أوليـه (أساسيه) ، لكن لو تم نشر البيانات الاساسية للجهات المشار اليها عاليه بعد اقتباسها عن طريق جهات أخرى كالهيئات الصحفيه فى جرائدها أو مجلاتها أو فى منشورات لباحثين أخرين أو مؤلفى كتب وما شابه ذلك وفقاً لما تتطلبه مثل هذه البحوث أو أغراض النشر من تعديل أو تحوير فى البيانات الأساسية فإن المصادر الأخيرة يطلق عليها مصادر ثانويـة (غير أصلية)

وبالطبع الإعتماد على بيانات المصادر الأولية الأساسية أفضل من الاعتماد على بيانات المصادر الثانوية، فالأولى تعتبر مصادر مباشرة ، والثانية تعتبر مصادر غير مباشرة ، هذا بجانب أن الأولى تحتوى على تفسيرات وتوضيحات عن طبيعة مجتمع الدارسة ووحداته ، وكافة مستنداته بعكس الثانية، أيضاً فإن البيانات فى الثانية قد تتعرض لأخطاء من جراء عملية نقل البيانات أو تفسيرها ، وأخيراً فإن من مزايا المصادر التاريخية أن تكاليفها المادية والعينية والزمنية محدودة أو تكاد أن تكون منعدمة فى أحيان كثيرة من وجهة نظر الباحث الأحصائى .

ثانياً : **المصادر الميدانية** : وفيه يقوم الباحث بنفسه بجمع البيانات التى يريدها مباشرة من ميدان بحثه ، ولا يلجأ الباحث إلى المصادر الميدانية إلا فى حالة إستحاله أو تعذر الحصول على البيانات من المصادر التاريخية ، أما لعدم وجودها أو لصعوبة الحصول عليها أو لسريتها أو لعدم كفاية البيانات المنشورة بها لإجراء الدراسة المطلوبة ، ويتم جمع البيانات الميدانية من خلال تصميم الباحث لاستمارة إحصائية ، تحتوى على مجموعة من الأسئلة ، وبالحصول على إجابات على هذه الاسئلة يتوافر للباحث البيانات التى يتطلبها بحثه أو دراسته ، وبالطبع فإنه فى مثل هذا النوع من مصادر البيانات ، يقتضى الأمر فيه الاتصال المباشر بمفردات مجتمع البحث لجمع الأجو به منها على طريق الاستمارات الإحصائية ، وبعد تجميع هذه الإستمارات وتفريغ بياناتها يتم تبويبها وتحليلها بهدف الوصول إلى نتائج إحصائية بعد دراستها، والمصدر الميدانى للبيانات يتطلب تكاليف مادية وعينية وزمنية تفوق بكثير مثيلاتها من المصادر الأوليه (التاريخيه) .

والسؤال الذى يتبادر إلى الذهن هنا ، كيف ، ومتى ، وأين يستخدم المصدر الميدانى لجمع البيانات اللازمة للدارس أو الباحث ؟

وللإجابة على ما سبق يتطلب الأمر مناقشة كل من (باختصار) .

- أساليب جمع البيانات من الميدان
- وسائل جمع البيانات من الميدان .

أولا : أساليب جمع البيانات من الميدان

أن معرفة كل من المعايير التالية هى التى تحدد الأسلوب الملائم لجمع البيانات الاحصائية من ميدان الدراسة :

أولاً : نطاق مجال البحث أو الدراسة (أى عدد مفردات مجتمع الدراسة) .

ثانياً : الهدف من الدراسة .

فإذا كان نطاق مجال البحث واسعاً جداً ، أى إذا كان عدد مفردات مجتمع الدراسة كبير جداً ومحدداً وملموساً وعما إذا كانت طبيعة مفردات البحث والدراسة لا تتعرض للتلف أو الهلاك من جراء عملية العد أو الحصر ، وكان الهدف من الدراسة الوصول إلى نتائج شامله ودقيقه عن مجتمع البحث، بغرض إستخدام هذه النتائج فى إجراء دراسات أخرى أكثر شمولاً ودقة واحتياجا للمجتمع السكانى ، كأن تستخدم فى عمليات التخطيط والتبنؤ بالمستقبل فى مجال محدد على سبيل المثال ، فى ظل الظروف السابقه يتطلب الأمر ضرورة إستخدام أسلوب الحصر الشامل بشرط توافر الإمكانيات المادية والعينية والبشرية والزمنية اللازمة لإجراء الدراسة ، لذا يستخدم أسلوب الحصر الشامل فى التعددات العامة للسكان والتعددات الزراعية ، والصناعية ..... الخ .

لكن إذا كان نطاق مجال البحث واسعاً وغير محدود أو ملموس مع تعرض مفردات مجتمع البحث للتلف أو الهلاك من جراء عملية الحصر أو العد، وكان الهدف من الدراسة الوصول إلى نتائج أكثر دقة عن مجتمع البحث ، مع توافر إمكانيات مادية وعينية وبشرية وزمنية محدودة لاجراء البحث ، فى مثل هذه الظروف يكون من الضرورى إستخدام أسلوب « العينات » عند جمع البيانات من مجتمع الدراسة أو البحث .

(أ) أسلوب الحصر الشامل (التعدادات) (Census) or (Complete Coverage)

وفيه يتم جمع البيانات عن الظاهرة موضوع الدراسة من جميع مفردات المجتمع الإحصائى (population) المراد بحثه سواء أكان نطاقه أو مجاله واسعاً أو محدوداً وفى كلا الحالتين يتطلب هذا لأسلوب توافر إمكانيات مادية وبشرية وعينيه وزمنية أكبر نسبياً من أسلوب العينات .

(ب) : اسلوب العينات (أو المعاينة) (Sampling)

ويمقتضى هذا الاسلوب يتم جمع البيانات عن جزء فقط من مفردات المجتمع الاحصائى، أى من عينه من هذا المجتمع يتم سحبها بطريقه ما بما تساعد فى تعميم نتائجها على مجتمع البحث.

ولكل أسلوب ظروف - أو معايير - محددة يفضل فيها استخدامه والتى أجملناها فيما سبق كما أن لكل أسلوب منهما مزاياه وعيوبه .

مزايا أسلوب الحصر الشامل :

١ - خال من أخطاء الصدفة (الاخطاء العشوائية أو أخطاء المعاينة)

٢ - أسلوب الحصر الشامل نظراً لإتساع نطاق مجاله فانه يعطى صوره مفصله عن مفردات الظاهرة موضوع الدراسة .

عيوب أسلوب الحصر الشامل :

١ - الزيادة الكبيرة فى التكاليف المادية والعينة والبشرية والزمنية اللازمة لإجراء الدراسة .

٢ - بسبب إتساع نطاق مجال الدراسة فيه فبجانب طول الوقت اللازم للانتهاء من الدراسة وما يؤد به ذلك من زيادة فى التكاليف ، ففى كثير من الأحيان يؤدى ما سبق إلى فقد نتائج البحث حداثتها وبالتالى قيمتها.

٣ - تنشأ عن الحصر الشامل نوع من الأخطاء يطلق عليه الأخطاء العامة أو أخطاء التحيز (Bias Erior) وهى تنتج عن أسباب عديدة مرجعها مثلاً إلى

عدم شمول أو حداثه إطار مجتمع البحث ،أخطاء الأرهاق الناتجه عن عبء العمل على القائمين بعمليه التعداد ، أخطاء ناتجه عن اعطاء مفردات مجتمع البحث إجابات خاطئة سهواً أو عمداً، هذا بجانب أخطاء ناتجة عن تراخى فى اجادة تصميم إستمارة البحث أو عدم فهم العداديين أو المبحوثين لمدلولات بعض الأسئلة بها، أخطاء ناتجة عند أعداد عمليات التصنيف أو التحليل .... الخ وهذه الأخطاء لا يمكن قياسها أو امكان ضبطها بدرجة كافية، ورغم أن نفس النوع من الاخطاء العامة يتعرض له أسلوب المعاينة، إلا أن نطاقها أقل نسبياً وهناك فرصة أكبر لامكانية ضبطها عنه فى أسلوب الحصر الشامل بجانب سهولة اتخاذ التدابير اللازمة لمواجهة الأسباب المؤدية إليها.

إطار مفرداتها مما يستحيل معه إجراء البحوث الإحصائية عليها باستخدام أسلوب الحصر الشامل مثل مجتمعات الطيور والحيوانات المفترسة والاسماك...الخ.

مـزايـا أسلوب العينات :

١ ـ نظراً لأن العينه جزء من مجتمع البحث فإنه بإستخدام هذا الأسلوب سيكون هناك وفراً كبيراً فى التكاليف المادية والعينة والبشرية والزمنيه اللازمة لإجراء الدراسة ، مما زاد من امكانية اجراء كثيرا من البحوث مع الاستفادة من نتائجها فورا وفقاً لهذا الاسلوب خاصة فى مجالات لم يكن من المتصور قيام جهات أو هيئات معينه باجراء بحوث عليها لأسباب إقتصادية خاصة فى الدول ذات الإمكانيات المادية المحدودة .

٢ ـ بسبب ضيق نطاق مجال الدراسة وفقاً لأسلوب المعاينة وبالتالى إنخفاض تكلفته فإنه يؤدى إلى إمكانية إجراءات دراسات أكثر تفصيلاً بالتطرق إلى أسئلة أكثر عدداً نسبياً مما عليه عند إتباع أسلوب الحصر الشامل، مما سيزيد من تحليلات الدراسة وبالتالى دقة نتائجها وفقاً لهذا الأسلوب.

٣ ـ يتعين بالضرورة استخدام أسلوب المعاينة فى الحالات التى تتعرض مفردات مجتمع البحث فيها للتدمير أو الهلاك الجزئى أو الشامل عند فحصها أو

عدها كما هو الحال عند فحص جودة إنتاج اللمبات الكهربائيه ، أو فحص مجتمع لإنتاج البيض أو قياسات لمدى نوع معين من الصواريخ أو عند إجراءات فحص للدم .... الخ، حفاظاً على قيم وصلاحية مفردات مثل هذه الأنواع من الأشياءوالمنتجات.

٤ ـ إن أسلوب المعاينـة بما حققه من مزايا تكاليفه وزمنية ، ودقه في النتائج، فتح الباب واسعاً لإجراء كثيراً من الدراسات والبحوث.والتجارب العلمية والعملية في كافة مجالات وميادين البحث العلمي ، والاستفادة الكاملة من نتائجها التي فاقت دقتها في كثير من الأحيان نتائج الدراسات في مثل هذه المجالات باستخدام أسلوب الحصر الشامل .

٥ ـ بسبب ضيق نطاق مجال الدراسـة وفقاً لأسلوب المعاينـة فقد أمكن زيادة الرقابة والضبط والتحكم في معظم الأسباب المؤديـه إلى الاخطاء العامة (التحيز) التي تتعرض لها نتائج الدراسـة مما قلل إلى حد كبير نسبياً من مثل هذه الأخطاء عنه في أسلوب الحصر الشامل، ويرجع لهذا السبب ـ إلى حد كبيرـ في كثير من الأحيان تفضيل أسلوب العينات عن أسلوب الحصر الشامل.

٦ ـ بإستخدام أسلوب المعاينـة ، فيما لو تم بطريقه علميه سليمه وباستخدام نظريـه الاحتمالات ، يمكن التحكم في خطأ المعاينـة التي ينفرد بها هذا الاسلوب حتى نصل به إلى حده الأدنى، بما يزيد من دقه النتائج الممكن تعميمها بإستخدام اسلوب المعاينـة ، بجانب مزاياه الاقتصاديـة والفنيـة الأخرى.

٧ ـ يتعرض أسلوب العينات لخطأ التحيز وهو نفس الخطأ الذي يتعرض له أسلوب الحصر الشامل ، وينشأ هذا الخطأ لأسباب كثيره، منها ما يرجع إلى مفردات البحث كعدم إعطاء الاجابات الصحيحة عن الاسئلة لسوء الظن بها أو الخوف من الادلاء بالاجابة الصحيحة عليها ، ومنها ما يرجع إلى الباحث مثل سوء تصميم استماره أو عدم شمول أو حداثه اطار البحث، أو لعدم القيام بالدعاية الكافية عن أهمية البحث والغرض منه، ومنها ما يعود لشخصية العدادين، وعدم كفاية تدريبهم، أو لسوء تسجيلهم للاجابات، أو الأسباب الأخرى في عمليات

التبويب أو التحليل، لكن نظراً لأن نطاق مجال العمل فى أسلوب العينات محدوداً بالمقارنة بمثيله فى أسلوب الحصر الشامل مما سيؤدى إلى زيادة درجة فعالية الرقابة والتنظيم والاشراف والمراجعة فى أسلوب العينات عنه فى أسلوب الحصر الشامل ومن ثم يقلل من درجة خطأ التحيز وبالتالى دقة النتائج فى أسلوب العينات عنه فى أسلوب الحصر الشامل.

عيوب أسلوب العينات :

١ ـ يتعرض أسلوب المعاينة إلى نوع آخر من الأخطاء ينفرد به هذا الأسلوب ويطلق عليه خطأ المعاينة أو خطأ الصدفه ، وهو راجع إلى أن العينه جزء من المجتمع ، ومهما كان أسلوب إختيار مفردات العينه ، والإحتياطيات العلمية والعملية المتخذة لأتاحة فرصة ثابته لكل مفرده من مفردات المجتمع للدخول فى مفردات العينة، فلابد من وجود فرق فى المقاييس الاحصائية وينشأ الفرق فى نتائج المقاييس المشار إليه بسبب طبيعة إختلاف وزن المفردات المختلفة الداخلة فى مفردات العينة عنه فى مفردات المجتمع ، وهذا الفرق يطلق عليه خطأ المعاينة والذى أمكن باستخدام نظرية الاحتمالات حساب قيمته ،ولتوضيح ماتقدم نضرب المثال المبسط التالى :

إذا كان لدينا مجتمع إحصائى مكون من خمسة طلاب هم أ ، ب ، جـ ، د ، هـ أطوالهم على الترتيب بالسنتيمتر ١٨٠ ، ١٦٥ ، ١٧٥ ، ١٩٠ ، ٢٠٠ وتم اختيار عينة مكونة من أربعة طلاب منهم، وأردنا قياس متوسط الطول لكل من المجتمع والعينة حيث أن:

$$\text{متوسط الطول} = \frac{\text{مجموع أطوال الطلبة}}{\text{عددهم}}$$

وعليه سنجد:

متوسط الطول للمجتمع وسنرمز له بالرمز (μ)

$$= \frac{١٨٠ + ١٦٥ + ١٧٥ + ١٩٠ + ٢٠٠}{٥} = \frac{٩١٠}{٥} = ١٨٢ \text{ سم}$$

عدد العينات الممكن اختيارها = $^{5}ق_{4}$ = ٥ عينات وهى كالأتى مع حساب متوسط الطول فى كل عينة منها:

العينه (١) (أ، ب ، جـ ، د) ومتوسط الطول بها، وسنرمز له بالرمز $\bar{س}_{1}$

$$= \frac{١٨٠ + ١٦٥ + ١٧٥ + ١٩٠}{٤} = \frac{٧١٠}{٤} = ١٧٧,٥ \text{سم}$$

العينه(٢) (أ، ب ، جـ ، هـ) ومتوسط الطول بها وسنرمز له بالرمز $\bar{س}_{2}$

$$= \frac{١٨٠ + ١٦٥ + ١٧٥ + ٢٠٠}{٤} = \frac{٧٢٠}{٤} = ١٨٠ \text{سم}$$

العينه (٣) (ب ، جـ، د ، هـ) ومتوسط الطول بها وسنرمز له بالرمز $\bar{س}_{3}$

$$= \frac{١٦٥ + ١٧٥ + ١٩٠ + ٢٠٠}{٤} = \frac{٧٣٠}{٤} = ١٨٢,٥ \text{سم}$$

العينه (٤) (أ، ب ، د ، هـ) ومتو سط الطول بها وسنرمز له بالرمز $\bar{س}_{4}$

$$= \frac{١٨٠ + ١٦٥ + ١٩٠ + ٢٠٠}{٤} = \frac{٧٣٥}{٤} = ١٨٣,٧٥ \text{سم}$$

العينه (٥) (أ، جـ ، د، هـ) ومتوسط الطول بها وسنرمز له بالرمز $\bar{س}_{5}$

$$= \frac{١٨٠ + ١٧٥ + ١٩٠ + ٢٠٠}{٤} = \frac{٧٤٥}{٤} = ١٨٦,٢٥ \text{سم}$$

واضح أن متوسط الطول ($\bar{س}$) بين مفردات العينات يختلف عن بعضها البعض، وأيضاً يختلف عن متوسط الطول فى المجتمع (μ) حيث هناك فرق بين متوسط العينة ومتوسط المجتمع ويختلف هذا الفرق (خطأ المعاينة) أو الصدفة بين نتائج كل عينة ونتائج المجتمع ولقياس هذا الخطأ (متوسط العينة - متوسط المجتمع ($\bar{س} - \mu$) حيث يبلغ هذا الخطأ.

(١) الخطأ فى العينـة الأولى = ١٧٧,٥ ـ ١٨٢ = – ٤,٥ سم .

(٢) الخطأ فى العينـة الثانيـة = ١٨٠ ـ ١٨٢ = –٢سم .

(٣) الخطأ فى العينـة الثالثة = ١٨٢,٥ ـ ١٨٢ = + ٠,٥ سم

(٤) الخطأ فى العينـة الرابعـة = ١٨٣,٧٥ ـ ١٨٢ = + ١,٧٥ سم

(٥) الخطأ فى العينـة الخامسة = ١٨٦,٢٥ ـ ١٨٢ = + ٤,٢٥ سم

أى أنه قـد يكون هذا الخطأ (خطأ الصـدفـة) سالبـاً فى بـعض العـينات وموجباً فى البعض الأخر ، لكن محصلته النهائية أى مجموعه من كافة العينات الممكنه لابد وأن يساوى (الصـفر)، ويتوقف قيمة خطأ الصـدفة على عوامل كثيرة منها حجم العينـة، فالعلاقـة عكسيه بين حـجم العنيه وقيمة خطأ الصدفـة بينما العلاقة طردية بين تباين المجتمع وخطأ الصدفة ، كما أن لطريقة إختيار العنيـة أثر على قيمـة خطأ الصدفة فيـقل كلما زادت الـثقة فى تمثيل العـينـة للمجتمع تمثيلاً صحيحاً ودقيقاً والعكس صحيح ، ونظراً لامكانيـة ضبط وقياس هذا الخطـأ من ناحـيـة وإمكانيـة العمـل على أن يصل إلى حـده الأدنى من ناحيـة ثانية، وعليه فإن فرق خطأ التحيز فى صالح أسلوب العينـات عنه فى أسلوب الحصـر الشـامل من ناحيـة ثـالثـة، فلو فرضـنا أن خطـأ الصـدفـه بلـغ ١ ٪ بينما بلغ خطأ التحيز فى مجتمع ما ٦ ٪ فى حين بلغ نفس الخطأ فى عينـة من نفس المجتمع ٢ ٪ ، فإن مجموع خطأى الصدفة والتحيز فى العينة سيبلغ (١ ٪ + ٢ ٪ = ٣ ٪) والتى ستبلغ نصف قيمة خطأ التحيز فى مـجتمع الدراسة (٦ ٪) مـا تقدم يوضح أن إنفراد أسلوب العينات بخطأ الصدفة لا يقلل من قيمة وأهمية هذا الأسلوب فى مختلف ميادين البحث العلمى.

٢ ـ أن عملية تحديد نوع العينـة المسحويـة والتى تعتبر ممثله للمجتمع تمثيلاً صحيحاً وصادقاً تعتبر هدفـا أساسيا من عمليه المعاينـة حتى تكون أخطاء المعاينـة فى النتائج عند حدها الأدنى ، ولا يتأتى ذلك الا بمنع أو تقليل عمليه التحيز عند إجراء عمليـه الإختيار لمفردات العينـة من مفردات مجتمع الدراسة.

٣ – إن تحديد النوع والحجم المثالى للعينة التى تعطى أفضل النتائج من حيث الدقة المسحوبه من المجتمع يتوقف على درجه التجانس بين مفردات مجتمع الدراسة ، فتكون العلاقة عكسيه بين حجم العينه ودرجه التجانس المشار إليها، لذا فإن هذا الأمر يتطلب المعرفة الدقيقة لبعض خصائص هذا المجتمع مقدماً ـ وبدون هذه المعرفة أو تعذرها تصبح عمليه المعاينة نفسها متعذره ومستحيله ، وبمعنى آخر فإن أسلوب المعاينة لا يفضل أن يتم مستقلاً بذاته دون معرفة لخصائص المجتمعات التى ستتم دراستها من خلاله .

يتضح لنا مما تقدم أن مزايا وظروف استخدام أسلوب المعاينة حتمت الاهتمام بهذا الأسلوب ومحاوله زيادة دقة نتائجة ، وذلك بالعمل على التقليل أو القضاء على العيوب والمشاكل السابقة – حتى أصبح علماً قائماً بذاته سنعرض باختصار لدراسة بعض أنواع العينات الهامة، ولكن قبل ذلك لابد من تعريف إطار مجتمع البحث، ومبدأ العشوائية فى إختيار العينات.

(أ) الإطـار (Fram) :

قبل إختيار مفردات العينة يجب وضع جميع وحدات مجتمع البحث فى قائمة مرتبة حسب الأحرف الهجائيه مثلاً فعند سحب عينه من سكان محافظة الاسكندرية فالإطار هو قائمة بأسماء جميع سكان محافظة الاسكندرية عند تاريخ سحب العينة أو أقرب تاريخ أعد فيه هذا الاطار ، وقد تكون وحدات الاطار هنا قائمة بأسماء الأسر بالمحافظة ، وقد تكون خريطة لمساحة أرض زراعية أو صورة شمسيه لها ... الخ ، وعليه يتضح لنا أن الإطار هو وسيله تحتوى على جميع وحدات مجتمع المعاينة ، وعلى ذلك يختلف الإطار من عينه لأخرى طبقاً لطبيعة الدراسه ونوع العينة ، لكن يشترط فيه أن يكون

حديثا، أي مشتملا لجميع وحدات المجتمع الإحصائي أي غير غافل لاحتواء احداها من ناحية مع مراعاة عدم تكرار مثل هذه الوحدات به اكثر من مرة من ناحية أخرى ، حتى يتحقق مبدأ العشوائية كاملا ، عند القيام بعملية اختيار مفردات العينة من خلاله .

(ب) مبدأ عشوائية الإختيـار : أن العشـوائيـة فى الاخـتيـار لا تـعنى الإختيار حسبما أتفق أو بغير هدى وفقاً للمعنى العام للكلمة ، لكن العشوائيـة تعنى هنا إتاحه فرص متكافئـة فى الاختيار لكل مفردة من مفردات مجتمع البحث للدخول فى العينـة المختاره وبمعنى آخر لابد من توافر إحتمال متساوى لجميع وحدات المجتمع للدخول فى الإختيار ضمن مفردات العينة، وممكن أن يتحقق مبدأ العشوائية المشار إليه بإستخدام أكثر من وسيلة علمية عند القيام بعملية الإختيار وفقاً لما سيأتى فيما بعد:

(حـ) أنواع العينات العشـوائيـة : نظراً لإختلاف طبيعة وخصائص مجتمع البحث أوالدراسـة من حالة لأخرى من ناحية، وأختلاف الهدف من الدراسة من ناحية أخرى ونظراً لأن الهدف من استخدام أسلوب العينات هو الرغبة فى الحصول على بيانات عن مجتمع الدراسـة بأقل تكلفه وفى الوقت المناسب مع جعل أخطاء المعاينـة عند حدها الأدنى حتى لا تؤدى نتائجها غير الدقيقه إلى تقديرات غير دقيقة أيضاً من ناحيـة ثالثـة ، لكل ما تقدم فهناك أكثر من نوع للعينات العشوائيـة نذكر منها بإيجاز مايلى :

١ ـ العينـــة العشوائيـــة البسيطة (Simpl Randam Sample)

هى العينة التى يتم سحب مفرداتها على أساس تساوى أو تكافىء الفرص للإختيار لجميع مفردات مجتمع البحـث للدخول فى مفردات العينـة، أى لا يتم التحيز لأى مفردة من مفردات المجتمع على حساب المفردات الأخرى ، وهذا يعنى أن نتيح لكل مفردة من مفردات مجتمع البحث إحتمال متساو ومستقل للدخول فى مفردات عينه البحث ، والأمر يقتضى منا لتحقيق مبدأ العشوائية السابق القيام بوضع وحدات المجتمع فى إطار مع إعطاء أرقام متسلسلة لكل مفردة من مفردات إطار المجتمع ، ثم اختيار مفردات العينة ، مفردة مفرده مع إستبعاد المفردات التى يتكرر دخولها حتى ننتهى من سحب كافة مفردات العينـة ، ويمكن إجراء ما تقدم بأكثر من وسيلة أو طريقة على حسب حجم مفردات العينـة المختارة .

- **طريقة السلة أو الصندوق المثالى : وتستخدم هذه الطريقة إذا كان كلا** من إطار المجتمع وعدد مفردات العينة صغيراً ، فمثلاً اذا أردنا سحب عينه مكونه من ١٠ أطفال من مجتمع يتكون إطاره من ٥٠ طفلاً هنا نحصل على ٥٠ بطاقة صغيرة متشابة من كافة النواحى، ونرصد على كل بطاقة منها رقماً إعتباراً من الرقم (١) حتى الرقم (٥٠) ثم نطوى الخمسون بطاقة بطريقة متطابقة تماماً ، ونضعها فى السله أو الصندوق ونخلطها جيداً ثم نسحب المفردة الأولى ولتكن البطاقة التى تحمل الرقم (٨) فرضاً فنسجلها فى قائمة مفردات العينة ثم نعيد هذه البطاقة إلى السلة مرة أخرى، ثم نخلط البطاقات جيداً مرة أخرى ويتم سحب المفردة الثانية ولتكن البطاقة التى تحمل الرقم (٢٤) وتقوم بتسجيلها فى قائمة العينة ونعيد البطاقة إلى السلة وتقوم بالخلط جيداً مرة ثانية ثم سحب المفردة الثالثة ولتكن تحمل الرقم (٨) وحيث أن هذا الرقم ظهر فى السحبة الأولى فلا يسجل حتى لا تتكرر مرتين ولكن تعاد هذه البطاقة إلى السله ويتم السحب للمفردة الثالثة مرة أخرى وهكذا نكرر العملية المشار إليها عاليه إلى أن نصل إلى قائمة مكونه من ١٠ أرقام مختلفة ونترجمها بأسماء الأطفال الذين يحملون الأرقام المختاره وهى التى تكون مفردات العينة العشوائية البسيطة المطلوبة التى سنجرى عليها الدراسة المطلوبة.

- **طريقة جداول الأعداد العشوائية** : وتستخدم هذه الطريقة سواء كان حجم العينة صغيراً أو كبيراً ، وتتميز عن الطريقه السابقة بالبساطة والسهولة ، حيث أعدت مقدماً جداول يطلق عليها جداول الاعداد العشوائية قد تكون مكونه من رقمين متجاورين أختيرت عشوائياً من مجموعة الأعداد (٠٠ ، ٠١، ٠٢، ٠٣، ٠٠٠، ٩٩) ورتبت فى عدد من الصفوف وعدد من الأعمدة، وبالرغم من أنها مرتبه رقمياً فى كل صف أو عمود من رقمين الا أنه يمكن تحويلها إلى أعمدة أو صفوف مكونه من ثلاثة أو أربعة أو خمسة أرقام أو أى عدد أخر وذلك بضم رقمى العمود الأول والرقم الأول من العمود الثانى) أو أرقام العمود الأول وأرقام العمود الثانى معاً ، أو أرقام العمود الأول والثانى ، والرقم الأول من العمود الثالث بالترتيب وهكذا ، ويتضح لنا ما تقدم بأخذ القطاع البسيط التالى من هذه الجداول والمرفقة فى نهاية الكتاب.

٣٢	٥٠	٥٣	١٦	٩٥	٩٨	٣٢	٤٨	٦٣	٩٦	٧٧	٠٢	٢٢	٤٩	١٥
٩٢	٥٢	٤٠	٥١	٨٢	٩٦	٤٠	٣٦	٤٠	٣٢	٦٤	٦٧	٣٦	١٢	٢٨
٢٧	٧٠	٢١	٣٤	٥٩	٠٣	٣٩	٤٣	٢٧	٥٠	١٢	٥٥	١١	٢٥	٣٤
٢٥	١٠	١٦	٧٠	٩١	٤٣	٥٣	٧١	٠٠	٥٤	٢٦	٣٧	٥٢	٨٢	٢٣
٣١	١١	٣٣	٤٩	٨٣	٠١	٠٦	٤٣	٤٩	١٤	٣٧	٤٢	٨١	٨٣	٦٧

ويتم إختيار عينة الأطفال السابقة لو بدءنا عشوائيا من العمود الثالث فى

الجدول السابق كما يلي : (٢١، ١٦، ٣٣، ٤٩، ٣٤ ، ٠١ ، ٤٣ ، ٠٣،٣٢) علي الترتيب ، ونلاحظ إننا استبعدنا الأرقام الأكبر من اكبر رقم في إطار المجتمع هو (٥٠) وأخذنا الأرقام الأقل مع استبعاد الأرقام المتشابهة التي

تكررت ، حتى لا يكون هناك تحيز لمفردات الأرقام المكرره مع ملاحظة أنه يمكن اختيار نقطة الابتداء من أى مكان عشوائياً سواء من الأعمدة أو من الصفوف مع ثبات الطريقة المختارة حتى الانتهاء من اختيار عدد مفردات العينة سواء بإتخاذها تتابعيا إلى أسفل أو أعلى أو يمين أو يسار الرقم الأول المختار.

ونلاحظ أن مبدأ العشوائية هنا متوافر عند إعداد الأرقام العشوائية لهذا الجدول لأن كل خانة فيه تم إختيارها عشوائياً،هذا بجانب أن ترتيبها تم عشوائياً ، كما يتم إختيار نقطة الإبتداء عشوائياً، وأخيراً النظام الهندسى المستخدم فى عملية التتابع عند اختيار مفردات العينة يتم ايضاً عشوائياً، كما يمكن من واقع هذه الجداول العشوائية إختيار أى عينه مهما كان عدد مفرداتها أو عدد مفردات إطار مجتمع البحث فإذا بلغ الأطار الكلى٥٠٠٠ وحجم العينة (٥٠) فإننا نضم عمودين معاً قد يكونا الأول والثانى أو الثانى والثالث.. الخ لتكون الأرقام المختارة منها مكونة من خانات (الاحاد/ والعشرات/ والمئات/ والألوف) كما هو الحال فى أكبر رقم يتكون منه الاطار (٥٠٠٠) ثم نختار (٥٠) مفردة بالتتابع مع ملاحظة عدم التكرار ، أى استبعاد الأرقام التى سبق ظهورها فى الأعمدة أو الصفوف واستبعاد الارقام التى تزيد عن (٥٠٠٠) إلى أن ننتهى من إختيار مفردات العينة.

الحاسبات الالكترونيـة (الآليـة) :

وأخيراً إذا كان مجتمع الدراسة واسعاً جداً أى أن مفردات مجتمع البحث كبيراً جداً ، وأيضاً عدد مفردات العينـة كبيرة نسبياً ، فيمكن استخدام النظام الالكترونى أى الحاسبات الآلية عند إختيار مفردات العينة وهى عبارة عن آلات حديثة تقوم بآلاف العمليات المتنوعة فى وقت قصير جداً ومجهود أقل وأيسر مما تتطلبه طريقتى السلة وجداول الأرقام العشوائية (اليدوية) .

وتتميز العينـة العشوائيـة البسيطـة بسهولة وبساطـة ودقـة إختيارها ويفضل استخدامها إذا كانت مفـردات الإطـار متجانسـة، لكـن إذا كانت مفردات الإطار غير متجانسة فإن هذا النوع من العينات لايكون ممثلاً للمجتمع تمثيلاً صحيحاً ، وبالتالى تكون نتائجها ونتائج التقديرات المطلوبة بإستخدامها غير دقيقـة ، هذا بالاضافة إلى أن إستخدام هذا النوع من العينات لايكون مستحباً اذا كانت مفردات العينة المطلوبة صغيرة بينما مفردات الإطار منتشرة على نطاق واسع جغرافياً،ذلك لأن مفردات العينـة وفقاً لهذا النوع من العينات فى الحالـة السابقة قد تتضمن مفردات تقع فى مناطق نائبـة بحيث يتعذر الوصول إليها أحياناً،أو أن الوصول إليها يزيد من عامل التكلفة المادية والبشرية والزمنيـة بما يقلل من فائدة أسلوب المعاينـة أو يشوبه لو تم إهمال مثل هذه المفردات ، وأخيراً هذا النوع من العينات يحتاج إلى إعداد إطاراً شاملاً وحديثاً والذى يستحيل إعداده فى بعض الحالات كما يكون إعداده مكلفاً فى أحيان أخرى.

٢ ـ العينـة الطبقيـة (*Strati Fiecl Sample*)

إذا كانت مفردات مجتمع الدراسـة غير متجانسة ، ويمكن تقسيم هذا المجتمع إلى عدة أقسام أو طبقات متجانسة فيما بينها وذلك وفقاً لمعيار محدد ، بحيث تتجانس إلى حد كبير. مفردات كل طبقة مع بعضها البعض وفقاً لذلك المعيار بينما تختلف مفردات كل طبقة عن الأخرى وفقاً لنفس المعيار، فمثلاً إذا كنا ندرس مستويات الدخول السنوية لسكان منطقة معينـة ، فإنه يمكن تقسيم سكان تلك المنطقة إلى مجموعة من الطبقات وفقاً لمستويات الدخول كطبقة

العمال العاديين ، وطبقة العمال المهنين وطبقة الموظفين الحكوميين ، ثم طبقة رجال الأعمال ، وأخيرا طبقة أصحاب المهن الحرة ، وبإستخدام الإجراء السابق فإننا نعمل على التقليل من عدم التجانس بالنسبة لمعيار الدخل بين مفردات مجتمع الدراسة كاملاً، وحتى تكون العينة ممثلة للمجتمع تمثيلاً صحيحاً، فإننا نعتبر كل طبقة مجتمعاً مستقلاً حيث نسحب بطريقة عشوائية بسيطة عدد من مفردات كل طبقة تتناسب مع مجموع مفردات هذه الطبقة ، بحيث يكون مجموع المفردات المسحوبة من الطبقات المختلفة هى التى تمثل عينه الدراسة للمجتمع ككل ، والعينة الطبقية اذا كانت تمثل بالتساوى أو نسبياً تعتبر أفضل تمثيلاً لمجتمع الدراسة فيما لو تم سحب نفس حجم العينة بطريقة عشوائية بسيطة من المجتمع الكلى .

وتتميز العينة الطبقية بأنها تقضى على مشكلة الإختلاف الكبير بين مفردات المجتمع - فى العينات العشوائية البسيطة - بتقسيمة إلى طبقات متجانسة ، كما أن استخدام العينة الطبقية يقلل من خطأ التحيز بالعينات فلا يكون هناك تخوف من تركز مفردات عينه الدراسة فى المثال السابق فى طبقة بطبيعتها ذات متوسط دخل منخفض أو العكس يكون التركز فى طبقة بطبيعتها ذات متوسط دخل مرتفع ، ومن ثم لايعكس متوسط الدخل الناتج القيمة الحقيقية الدقيقة للمتوسط المشار اليه والتى يمكن تعميمها على المجتمع ككل ، وأخيراً فإن العينات الطبقية بأسلوبها السابق تساعد إلى حد كبير على تسهيل إعداد إطارات الدراسة لمفردات كل طبقة بدلاً من إعداد إطار شامل لمفردات الطبقات، كما أنها تمكننا من الحصول على نتائج مستقلة لكل طبقة بجانب الحصول على نتيجة عامة لمجتمع الدراسة ككل.

٣ ـ العينة متعددة المراحل *(Multi - Stage Sample)*

ولا يختلف هذا النوع من العينات عن العينات العشوائية البسيطة إلا فى طريقة الإختيار فقط ، حيث يتم الإختيار على مراحل متعددة مع توافر مبدأ العشوائية فى كل مرحلة ، وهنا يتم تقسيم المجتمع إلى أقسام متجانسة ويتم الإختيار العشوائى لعدد من المفردات بكل قسم بحيث يتم ذلك تتابعياً فيتم

الاختيار العشوائى من القسم الاول كمرحلة أولى ثم يتم الاختيار العشوائى من القسم الثانى كمرحلة ثانيه ، وهكذا حتى نصل إلى الإختيار فى المرحلة النهائية فمثلاً إذا كنا بصدد إعداد دراسة عن مستويات التحصيل لمادة جديدة بين طلبه المدارس الثانوية ، فإنه بدلا من إختيار عينه من الطلبة على مستوى الجمهورية بأسلوب العينات العشوائية البسيطة لما يحتاجه من وقت وتكلفة كبيرة فإنه يمكن أن تتم هذه الدراسة بأسلوب العينة متعددة المراحل ويتم ذلك كما يلى :

١ ـ تقسم الجمهورية إلى محافظات واعداد إطار باسماء هذه المحافظات ولتكن ٢٦ محافظة واختيار إحداها عشوائياً كمرحلة أولى .

٢ ـ تقسم المحافظة التى تم إختيارها عشوائياً فى المرحلة الأولى ولتكن المحافظة رقم (٤) إلى أقسام وفقاً للمراكز الادارية وليفترض أنها تتكون من ١٠ مراكز ادارية واختيار إحداها عشوائيا كمرحلة ثانية .

٣ ـ تقسيم المركز الإدارى المختار فى المرحلة الثانية وليكن المركز رقم (٨) طبقاً للمديريات التعليمية ونفترض أنه يتكون من (٧) مديريات تعليميه واختيار مديرتين تعليميتين منها كمرحلة ثالثة .

٤ ـ تحديد عدد المدارس الثانونية بكل مديرية من المديريات المختارة فى المرحلة الثالثة ولنفترض أن عدد المدارس الثانوية بالمديرتين المختارتين (٢٠) مدرسة فيتم إختيار (٤) مدارس منها عشوائيا كمرحلة رابعة .

٥ ـ يعد إطار باسماء الطلبه فى الـ(٤) مدارس التى تم إختيارها فى المرحلة الرابعة وتختار منه مفردات العينة المحددة للدراسة المطلوبة كمرحلة خامسة.

مما تقدم يتضح أن :

(أ) أن الدراسة تركزت فى عدد محدود من المدارس الثانوية بإحدى مراكز محافظة محددة مما سيؤدى إلى اتمام الدراسة فى أقل وقت ممكن وبأقل تكلفة ممكنة .

(ب) إن إعداد إطارات محددة بكل مرحلة أى لعدد المحافظات ، والمراكز الادارية باحدى المحافظات ، وعدد المديريات التعليمية باحدى المراكز، وعدد

المدارس الثانونية التابعة لمديرية تعليمية محددة ، واسماء طلبة إحدى المدارس الثانوية ، أسهل وأوفر وقتاً ومجهوداً وتكلفة من إعداد إطار شامل بطلبة المدارس الثانوية على مستوى الجمهورية .

٤ ـ العينة المنتظمة (Systematic Sample)

وبمقتضاها يتم إختيار مفردات العينة فى تتابع منتظم من مفردات مجتمع الدراسة ، وبمعنى آخر يتم ترتيب مفردات مجتمع الدراسة بطريقة محددة لها علاقة بموضوع الدراسة ، على أن نقسم مدى نطاق مجتمع الدراسة بعد ترتيبه إلى أقسام متساوية تتحدد بعدد مفردات العينة المراد إختيارها ، وهذا يعنى أن طول القسم الواحد المنتظم = $\frac{\text{مجموع وحدات مجتمع الدراسة}}{\text{عدد مفردات العينة}}$
ثم نختار عشوائيا المفردة الأولى للعينة من مفردات القسم الأول فى مجتمع الدراسة وتحديد ترتيبها به ، وهنا نوقف عملية الإختيار لباقى مفردات العينة ، حيث ستتحدد أرقام باقى مفردات العينة تلقائيا بدون اجراء اختيار وذلك بإضافة طول القسم على ترتيب المفردة الأولى المختارة فيتحدد ترتيب المفردة الثانية ، وباضافة طول القسم على ترتيب المفردة الثانية يتحدد ترتيب المفردة الثالثة ، وهكذا .

فمثلاً فى مجتمع مكون من ١٠٠٠٠ عامل فى صناعة معينة وأردنا إختيار عينه مكونة من ١٠٠ عامل من هذا المجتمع فيمكن تقسيم هذا المجتمع بعد ترتيبه أبجديا مثلاً إلى أقسام متساوية طول كل منها = $\frac{١٠٠٠٠}{١٠٠}$ = ١٠٠ قسم منتظم .

ويأخذ عمال القسم الأول الأرقام من (١ ـ ١٠٠) ، والقسم الثانى (١٠١ـ٢٠٠) والقسم الثالث (٢٠١ ـ ٣٠٠) ، وهكذا ...... حتى القسم الأخير من (٩٩٠١ ـ ١٠٠٠٠) .

ثم نختارعامل واحد من القسم الأول (١ ـ ١٠٠) عشوائياً ولنفرض أنه العامل رقم (٤٣) ومن ثم بتحديد رقم العامل الأول رقم (٤٣) تتحدد أرقام بقية عمال العينة كمايلى :

العامل الثانى = ترتيب العامل الأول + طول القسم المنتظم

= ٤٣ + ١٠٠ = ١٤٣

العامل الثالث = ترتيب العامل الثانى + طول القسم المنتظم

= ١٤٣ + ١٠٠ = ٢٤٣

وهكذا

العامل الأخير = ترتيب العامل قبل الأخير + طول القسم المنتظم.

= ٩٨٤٣ + ١٠٠ = ٩٩٤٣ .

ويتميز هذا النوع من العينات بالسهولة والبساطة فى عملية الإختيار من ناحية ، واختصار وقت سحبها وتكلفتها من ناحيه ثانية ، كما يمثل مجتمع الدراسة كله فى عينه الدراسة بما يجعلها ممثله تمثيلاً صحيحاً لمجتمع الدراسة فى كثير من الاحيان من ناحية ثالثة ففى الاطار الذى قمنا بإختيار مفردات العينة منه فى المثال السابق ، نجد أن عمال العينة المنتظمة المختارين من الاطار المشار اليه سوف تتضمن عدد متساوياً من كافة الأقسام والمهن والدرجات الوظيفة ، بما يجعل مثل هذه العينة من العمال أصدق تمثيلاً لمجتمع الدراسة وبالتالى أقل تأثراً بخطأ الصدفة وبالتالى تحيزاً للتقديرات بهذه العينة بالمقارنة بالعينات العشوائية البسيطة أو العينات الطبقية.

وما يعيبها هو فى إستخدامها اذا كان إطار مجتمع الدراسة يعكس إتجاهات دورية للظاهرة موضوع البحث وكان طول القسم مساوياً لطول الدورة ، كأن يكون فى المثال السابق وجود رئيساً للعمال لكل مائة عامل وليكن العامل رقم (١٠٠) فى القسم الأول والعامل رقم (٢٠٠) فى القسم الثانى ، ورقم (٣٠٠) فى القسم الثالث ...وهكذا ، ووقع الاختيار العشوائى فى القسم الأول على رئيس العمال رقم (١٠٠) وطبقا لأسلوب العينة المنتظمة ستكون العينة فى مثل هذه الظروف متضمنه كلها لرؤساء العمال فقط ، بما يجعلها غير ممثله لمجتمع الدراسة ـ مجتمع العمال ـ تمثيلاً صحيحاً وبالتالى تحيز تقديرات الدراسة بالعينة عن القيم الحقيقية لمجتمع الدراسة .

ويعتبر تصميم العينة من حيث نوعها وحجمها وطريقة إختيارها مسئولية الباحث الإحصائى بشرط أن يأخذ فى الأعتبار عامل التكلفة ، ولا يتأتى له التصميم الأمثل للعينة إلا بعد توافر الشروط التالية :

١ ـ الما الباحث الأحصائى إلى حد معقول بموضوع البحث أو الدراسة سواء تعلق بعلوم إقتصادية أو إجتماعية أو علوم طبيعية بما يساعده على فهم مشكلة البحث ووضعها فى القالب الإحصائى بما يساعد على وضع القواعد والاساليب والنظريات الاحصائية فى خدمة الدراسة المطلوبة .

٢ ـ أن يوضح الباحث الاحصائى للمسئولين والقائمين على الدراسة بأهمية توافر الاطار الشامل والصحيح والحديث على دقة نتائج وتقديرات الدراسة .

٣ ـ التزام الدارس بالرجوع الى الباحث الإحصائى إذا واجهته مشكلة ما فى أى ناحية من نواحى تصميم عينة البحث أو تنفيذها على الطبيعة .

ثانياً : وسائل جمع البيانات من الميدان

الإستمارة الإحصائية :

سبق أن أوضحنا أنه فى حالة تعذر أو عدم توافر البيانات من المصادر الأولية (التاريخيه) عن الظاهرة موضوع الدراسة ، فليس هناك بد من اللجوء الى المصادر الميدانية وسواء تم ذلك بإستخدام أسلوب الحصر الشامل أو أسلوب العينات فإن الوسيلة التى يتم جمع البيانات من الميدان عن طريقها هى «**الاستمارة الإحصائية** » وهى عبارة عن صفحة أو مجموعة من الصفحات يدون بها مجموعة من الاسئلة المطبوعة التى يقوم بإعدادها الباحث بهدف جمع الإجابات عنها من مفردات مجتمع البحث، والتى تكون البيانات الخام التى تتطلبها الدراسة وهناك قواعد أو شروط عامة يجب مراعاتها عند تصميم هذه الاستمارة الاحصائية تتلخص فيما يلى:

١ ـ أن يتضمن رأس الإستمارة، الغرض أو الهدف من الدراسة باختصار ووضوح ، وأهمية التأكيد على أثر الإجابات الصحيحة على دقة نتائج البحث

وتقديراته، وأيضاً التأكيد على سرية البيانات المدلى بها وعدم إستخدامها مرة أخرى فى غير الأغراض الإحصائية على أن يتم ما تقدم بأسلوب بسيط وسهل وصادق، وبما يعكس ثقة مفردات مجتمع البحث فى الباحث بجانب الإشارة إلى موضوعية وايجابية نتائج البحث للباحث وللمجتمع ككل كما أن وجود اسم الجهة القائمة أو المشرفة على البحث قد يزيد من الثقة المطلوبة، وأخيراً إبراز التحديد الواضح والدقيق للتعاريف والاصطلاحات ووحدات القياس المستخدمة فى البحث، بما يساعد على فهم موحد لها من جميع المبحوثين.

٢ ـ يجب الا يغالى الباحث فى عدد الأسئلة باستمارة البحث فيمل الباحث عند الاجابة عليها، وفى نفس الوقت لا يجب أن يكون عدد الأسئلة محدوداً جداً مما يؤدى إلى بيانات لا تفى بالغرض من البحث، ولكن يجب أن يكون عددها معقولاً مع مراعاة تغطيتها لأهداف الدراسة وعناصره الاساسية ، وتسلسلها المنطقى مع مقتضيات الدراسة حتى لا تنقطع سلسلة أفكار المستجوب أثناء إجابته عليها .

٣ ـ يجب أن تكون الاسئلة قصيرة حتى يمكن للمبحوث فهمها والإدلاء بالاجابات الصحيحة عليها فى أقصر وقت ممكن وبدون عناء كبير فى التفكير، من هنا يفضل تجزئه السؤال الى عدد من الاسئلة القصيرة للسبب ذاته ، مع مراعاة أن يكون كل جزء سهلاً وواضحاً من ناحية، ومحدداً، أى لا يحمل أكثر من معنى من ناحية أخرى.

٤ ـ يستحسن إستخدام الأسئلة التى تكون الإجابة عليها قصيرة ، ويفضل الأسئلة التى تكون الإجابة عليها بـ «نعم» أو « لا» ، فإذا كانت الاجابة على السؤال تحمل إجابات متعددة فيستحسن فى هذه الحالة كتابة كل الاجابات الممكنه تحت السؤال على أن يختار المبحوث الاجابة الصحيحة منها بوضع علامة صح (✓) أمامها مما يساعد فى تسهيل عمليات تصنيف وتبويب الاجابات بعد ذلك .

كما يجب الابتعاد عن الاسئلة التى تكون الإجابات عليها كيفية لكن يفضل أن تكون الاجابه عليها رقمية فمثلاً إذا كان هناك سؤال عن طول الشخص فلا تتم الاجابة عليه بقصير أو متوسط أو طويل ولكن تحدد شرائح

للطـــول بالسنتيمتر مـثـلاً (١٤٠م)، (١٦٠م)، (١٧٠م)، (١٨٠م) فـأكـثر مثـلاً، ويختار منها المبحوث ما يتفق مع طوله الفعلى بما يساعد على تبويبها بعد ذلك.

٥ ـ الإبتعاد عن الاسئلة الإيحائيـة ، أو التى تسبب حرجاً للمبحوث عند الإجابة عليها بما يبعده عن الاجابات الصحيحـة ، ومن ثم يكون هناك إحتمالاً كبيراً للتحيز فى الاجابات عليها (كمثال لماذا تفضل ماركه التليفزيون التى تنتجها مصانعنا ؟) .

٦ ـ يجب الإبتعاد عن الإسئلة التى تحتـاج إلى إجابات معقـدة أو تحتـاج الاجابه عليها إلى تفكير عميق أو عمليات حسابيه معقدة (مثلاً تحديد عمرك باليوم والشهر والسنة) .

٧ ـ يحسن تحليل السؤال الى عناصره المختلفة ، مثلاً اذا كنا نسأل عن تفضيل المبحوث لنوع معين من السيارات ، فيجب أن نتذكر أن هناك عوامل كثيرة للمفاضلة (كالتكلفة، والاداء، والحجم ، والمظهر) وكل عامل من هذه العوامل له جزئيات، فالتكلفة تنقسم إلى قسمين أحدهما تكلفة شراء السيارة والأخرى تتمثل فى النفقات الجارية لإستخدامها على ذلك فإن أجمال الأسئلة عن المفاضلة فى سؤال واحد سيكون مؤدياً فى الغالب إلى اجابات مضللة.

٨ ـ يستحسن إعادة صياغة بعض الاسئلة الاساسية بطريقة مختلفة وفى أماكن مختلفة بالاستمارة الاحصائيـة وذلك للتأكد من صحـة البيانات التى قام المبحوث بالأجابة عنها قبل ذلك، ويطـلق عليها مجموعـة أسئلة للمراجعة، فمثلاً للتأكد من صحة عمر المبحوث، فيكون هناك سؤال آخر عن عمر والدته، ولا يعقل مثلاً أن يكونا الفرق بين عمريهما ٧ سنوات، أو سؤال عن الوظيفة التى يشغلها المبحوث، وسؤال آخر عن مؤهله الدراسى، وهكذا .

وفيما يلى نموذجين للاستمارة الاحصائية الأولى ، خاصة بإستطلاع رأى الطالب بجامعة بيروت العربية ، والثانية نموذج تقويم الطلبة لمقرر دراسى بجامعة الملك سعود .

(١) استمارة استطلاع رأي الطالب

للإدارة فقط	م	ضع علامة (X) على احدى الاختيارات فقط								
	١	الكليـــة :	☐ الآداب	☐ الألسن	☐ التجارة	☐ العمارة	☐ الهندسة	☐ العلوم	☐ الصيدلة	☐ الطب ☐ طب الأسنان
	٢	القســم :								
	٣	السنة الدراسية :	☐ الأولى	☐ الثانية	☐ الثالثة	☐ الرابعة	☐ الخامسة			
	٤	الجنـس :	☐ ذكر	☐ انثى						
	٥	تقدير العام الماضي :	☐ ممتاز	☐ جيد جداً	☐ جيد	☐ مقبول	☐ منقول بمواد	☐ راسب		
	٦	درجة امتحان القبول (للطلبة الجدد) :	☐ فوق ٩٠٪	☐ فوق ٧٠٪	☐ دون ذلك					
	٧	نوع المدرسة في المرحلة الثانوية :	☐ [illegible]	☐ [illegible]						
	٨	نوع الشهادة الثانوية :	[illegible]	☐ العلوم التجارية	☐ الرياضيات	☐ الفلسفة	☒ البكالوريا الفنية			
			[illegible]	☐ [illegible]	☐ أدبي					
	٩	سبب الالتحاق بالجامعة :	☐ [illegible] العلمي للجامعة	☐ تعذر القبول في جامعة اخرى	☐ القدرات العادية	☐ [illegible]				
	١٠	سبب الالتحاق بالكلية :	☐ [illegible] شخصية	☐ توفر فرص العمل للخريج	☐ تعذر القبول في كلية اخرى	☐ رغبة الأهل	☐ لا [illegible]	[illegible]		
	١١	هل انت راضٍ عن دخولك الكلية؟	☐ نعم	☐ لا						
	١٢	المستوى العام للتدريس بالجامعة :	☐ جيد	☐ مقبول	☐ دون المستوى					
	١٣	مستوى تجهيزات المعامل :	☐ جيد	☐ مقبول	☐ دون المستوى					
	١٤	مقتنيات المكتبات :	☐ جيد	☐ مقبول	☐ دون المستوى					
	١٥	النشاط الاجتماعي بالجامعة :	☐ جيد	☐ مقبول	☐ دون المستوى					
	١٦	النشاط الرياضي بالجامعة :	☐ جيد	☐ مقبول	☐ دون المستوى					
	١٧	النشاط الفني بالجامعة :	☐ جيد	☐ مقبول	☐ دون المستوى					
	١٨	النشاط الثقافي بالجامعة :	☐ جيد	☐ مقبول	☐ دون المستوى					
	١٩	الخدمات الادارية بالجامعة :	☐ جيد	☐ مقبول	☐ دون المستوى					
	٢٠	المستوى العام للنظافة بالجامعة :	☐ جيد	☐ مقبول	☐ دون المستوى					
	٢١	مستوى المقصف بالجامعة :	☐ جيد	☐ مقبول	☐ دون المستوى					
	٢٢	الاعلام الداخلي بالجامعة :	☐ جيد	☐ مقبول	☐ دون المستوى					

نمـــوذج (ا)

نمـــوذج تقويـــم الطلبـة لمقـــرر دراسي

١ ـ رقم ورمز المقرر (الرمـــز الرقـــم) الشعبة : ....

٢ ـ المعدل التراكمي للطالب :

٤ ـ ٥	٣ ـ ٤	٢ ـ ٣	اقل من ٢

ضع اشارة (✓) تحت أحد الأرقام من ١ إلى ٥ أمام كل العبارات التالية علما بأن ١ تعني ضعيف جداً ، ٥ تعني ممتاز:

أولا : استعداد استاذ المادة للتدريس :

	١	٢	٣	٤	٥
١ ـ المامه بالمادة	☐	☐	☐	☐	☐
٢ ـ مدى حماسه لتدريس المادة	☐	☐	☐	☐	☐
٣ ـ وضوحه في ايصال المعلومات	☐	☐	☐	☐	☐
٤ ـ اعداده للمحاضرات قبل وقتها	☐	☐	☐	☐	☐
٥ ـ تشجيعه للعمل الممتاز من جانب الطالب	☐	☐	☐	☐	☐
٦ ـ تنميته لروح التفكير والابتكار والمناقشة	☐	☐	☐	☐	☐
٧ ـ نجاحه في حسن الاستعانة بالمعيدين (ان وجدوا)	☐	☐	☐	☐	☐
٨ ـ مدى استعداده للاجابة على أسئلة الطلبة	☐	☐	☐	☐	☐
٩ ـ مدى التزامه بمواعيد المحاضرات	☐	☐	☐	☐	☐
١٠ ـ مدى رغبتك في أن تدرس مقررا آخر مع هذا الأستاذ	☐	☐	☐	☐	☐
١١ ـ تقويمك لأداء استاذ هذه المادة مقارنا ببقية أساتذة القسم الذين درست معهم	☐	☐	☐	☐	☐
١٢ ـ استخدام وسائل الايضاح المعينة	☐	☐	☐	☐	☐

ثانيـا : علاقة الأستاذ بالطلبـة :

	١	٢	٣	٤	٥
١ ـ احترامه لآرائهم وتجاوبه مع أسئلتهم	☐	☐	☐	☐	☐
٢ ـ ترحيبه بالنقد الهادف	☐	☐	☐	☐	☐
٣ ـ وجوده أثناء الساعات المكتبية	☐	☐	☐	☐	☐

٤ - التقويم العام لعلاقة الأستاذ بالطلبة .... ☐☐☐☐☐

ثالثا: مساهمة هذا المقرر في تجربتك التعليمية:

١ ٢ ٣ ٤ ٥

١ - معرفتك بموضوع المقرر بصورة عامة .... ☐☐☐☐☐
٢ - حبك للمادة العلمية ورغبتك في تعلمها .... ☐☐☐☐☐
٣ - زيادة رغبتك في توسيع معلوماتك وادراكك حول الموضوع في المستقبل .... ☐☐☐☐☐
٤ - قدرتك على مناقشة الموضوع بصورة أكثر حساسية ومعرفة .... ☐☐☐☐☐
٥ - التقويم العام لمساهمة هذا المقرر في رفع مستوى معلوماتك .... ☐☐☐☐☐

رابعا: تقويم التخطيط لمنهج المقرر:

١ ٢ ٣ ٤ ٥

١ - المنهج من حيث الكيف .... ☐☐☐☐☐
٢ - وضوح وتتابع المواضيع وفروع المواضيع .... ☐☐☐☐☐
٣ - ترابط أجزاء المادة .... ☐☐☐☐☐
٤ - التذكير على المواضيع الرئيسية والاستنتاجات .... ☐☐☐☐☐
٥ - ملاءمة الكتاب المقرر والقراءات المختارة .... ☐☐☐☐☐
٦ - فائدة الواجبات الأخرى .... ☐☐☐☐☐
٧ - مستوى وطريقة الامتحانات .... ☐☐☐☐☐
٨ - عدالة وموضوعية تصحيح الامتحانات .... ☐☐☐☐☐
٩ - اذا قارنت هذه المادة بالمواد الأخرى التي درستها في الجامعة، كم من الوقت بذلته في الدراسة والاعداد لهذه المادة عن كل ساعة معتمدة (٥ تعني وقتا كثيرا جداً، ١ تعني قليلا جداً) .. ☐☐☐☐☐
١٠ - يستعمل معظم وقت المحاضرة في:

الإملاء ☐ الشرح ☐ المناقشة ☐

١١ - في دراستي لهذه المادة اعتمدت في الغالب على:

الكتاب المقرر ☐ المذكرات ☐ إملاء الأستاذ ☐ مراجع مختلفة ☐

أنـــواع الاستمارات الإحصائيـة :

يمكن تقسيم الإستمارات الإحصائيـة وفقاً لمن يقوم بملأها إلى نوعين رئيسين :

١ ـ صحيفـة الاستقصاء أو الإستبيان (*Questianaire*)

وهى إستمارة مطبوعة يعدها الباحث ، ثم يرسلها إلى المبحوثين بطريقة أو بأخرى[١] ، والذين بدورهم يعيدونها إلى الباحث بعد الإجابه عليها بأنفسهم بنفس طريقه الارسال بعد وقت كاف، ونظرا لأن المبحوث سيقوم بنفسه بالاجابه على الأسئلة فى صحيفـة لاستقصاء ، فجانت التصميم الجيد لصحيفة الإستبيان، يجب أن يرفق بها خطاب رقيق يحث المبحوث على التزام الجديـة والموضوعية فى اجاباته والتأكيد له على أنها ستكون سرية جداً، مع شرح مختصر لبعض الكلمات والمفاهيم التى جاءت بالأسئلة كما يراها الباحث حتى لايساء فهمها من قبل المبحوثين هذا من ناحية ، مع إرفاق مظروف عليه عنوان جهة البحث ملصق عليه طابع البريد ، حيث سيشجع الإجراء السابق المبحوثين على إعادة صحائف الإستبيان بعد الإنتهاء من الاجابـة على أسئلتها بدون تحمل أيـه أعباء مالية ، ويراعى هنا ألا تستخدم صحائف الإستبيان الا فى مجتمع ملم بالقراءة والكتابة من ناحية، وعلى مستوى من الإدارك للمسئولية حتى لا تقل نسبة عدد المستجيبين عن حد معين ، كما يفضل استخدامها عندما تتعلق الاسئلة بنواحى شخصية للمبحوثين من ناحية أخيره. ويتميز هذا الاسلوب بسهوله وقله تكاليف الإتصال بالمبحوثين خاصة اذا كان نطاق أو مجال مجتمع البحث واسعا وتم إرسالها بطريق البريد ، كما أنها توفر الوقت الكافى للمبحوثين للإنتهاء من إجاباتهم الصحيحـة والدقيقة .

٢ ـ كشف البحث (*Schedule*) :

ويختلف عن صحيفة الإستبيان من حيث قيام الباحث بنفسه – أو عن طريق مندوبين ـ اذا اتسع نطاق مجال البحث بتدويين إجابات مبحوثيه بعد

---

(١) بواسطة مندوبين أو عن طريق البريد.

الاتصال المباشر بالمبحوثين، أو بمشاهدة مفردات مجتمع البحث ـ إذا استخدم في البحوث التي تتم بالمشاهدة أو الملاحظة، ويتحتم إستخدام هذه الوسيلة لجمع البيانات اذا كان مجتمع البحث ترتفع به نسبه الأمية ، كما أنها تتميز بأنخفاض خطأ التحيز في إجابات بعض الاسئلة التي تنتج عن غموض أو عدم دقة تحديد الأسئلة وذلك بتفسيرها وايضاحها للمبحوثين من قبل الباحث أثناء المقابلة خاصة بالنسبة للاسئلة ذات الإصطلاحات الفنية ، وأيضاً تمكن الباحث في بعض الدراسات من تلمس بعض الإجابات الاضافية للبحث والباحث عن طريق الملاحظة ، كنظافة المنزل باعتبارها إحدى وسائل تحديد مستوى الثقافة الصحية لدى المبحوثين مثلاً ، لكن يعيبها الوقوع في خطأ التحيز من قبل الباحث في بعض الأحيان التي يؤثر فيها الباحث أو مندوبيه بدون قصد في اجابات مبحوثيهم من ناحية ، ولارتفاع تكلفه البحث نسبياً عنه بالمقارنة بأسلوب صحيفة الإستبيان من حيث عدد المندوبين اللازمين وتكاليف إنتقالهم، من ناحية ثانية، وطول الوقت اللازم للانتهاء من جمع البيانات باستخدامه من ناحية ثالثة.

وأخيراً يمكن أن يتم الحصول على البيانات من الميدان بإستخدام صحيفة الإستبيان أو كشف البحث باستخدام أحد الأساليب التالية :

١ ـ أسلوب المشاهدة أو الملاحظة أي بإستخدام النظر أو الحواس الأخرى وهو شائع الاستخدام في التجارب المعملية .

٢ ـ أسلوب المقابلة الشخصية بين الباحث أو مندوبه والمبحوثين .

٣ ـ أسلوب المراسلة أي الإتصال بإستخدام البريد بين الباحث والمبحوث.

٤ ـ أسلوب الإتصال التليفوني بين الباحث والمبحوث .

٥ ـ وأخيراً أسلوب يمزج بين الثلاث وسائل الأخيرة ، أي طريقة المقابلة الشخصية مع إرسال خطابات بالبريد أو الاتصال التليفوني .

الفصل الثـالث

تصنيف وعرض البيانات الإحصائيـة

المبحث الأول

تصنيف وعرض البيانات فى صورة جدولية

Classification & Tabulation

مقـدمـة :

بعد إنتهاء مرحلة جمع البيانات ، يصبح لدى الباحث أو الهيئـة المشرفة على الدراسـة مئـات أو ألاف الاستمارات الإحصائيـة ، والتى بدورها تتضمن أللالاف بل عـشرات الألاف فى بعض الأحيان من الاجابات عن أسئلة هذه الإستمارات التى تتعلق بموضوع البحث أو الدراسـة ـ خاصة اذا كبر حجم مجتمع الدراسـة وتشعبت عناصره ـ وتوافر مثل هذا الكم الهائل من البيانات الخام بالصورة التى عليها بعد مراجعتها لن يفيد فى إجراء الدراسات اللازمة فى إظهار نتائج عن المشكلة موضوع الدراسة ، ولن يتأتى ماسبق إلا بإجراء عمليات تجميع وتنسيق وترتيب لهذه البيانات ، وبمعنى آخر بتصنيفها وعرضها بما يسمح بسهوله إستيعابها من ناحية ، وامكانية وسهولة دراستها وتحليلها من ناحية أخرى .

أى أن الهدف من عمليات التصنيف والتبويب ، هو تجميع وتلخيص البيانات التى تم جمعها فى مجموعات متجانسة ، تختلف باختلاف طبيعة هذه البيانات، وأيضاً لكيفيـة إستخدامها بعد إجراء عملية التبويب لها، ومما لاشك فيه أن الجداول الإحصائية هى الوسيلة المثلى لإجراء عمليات التلخيص والتبويب المشار اليه .

والسؤال الذى يفرض نفسه فى ذلك المجال، ما هى وسائل وأسس أو كيفية وطرق تصنيف البيانات الاحصائية فى صورة جداول احصائية؟

تصنيف وتبويب البيانات في صورة جداول إحصائية

إن الغرض من عملية تصنيف أو تبويب البيانات المجمعة كما ذكرنا عاليه ، هو تجميعها فى صورة مجموعات متجانسة يطلق عليها « **الفئات**» حيث تتضمن الفئة الواحدة مفردات المجتمع الاحصائى المتحدة أوالمتشابهة فى صفة أو عدة صفات مرتبطة بموضوع البحث أو الدراسة فى خلية من الجدول الاحصائى المصمم لغرض عملية التبويب المطلوبة ، مما يسمح بالحصول على المجموعات « الفئات » المتشابهة فى أسرع وقت ، وبما يضمن دقتها واتاحة الفرصة لإجراء المقارنات المختلفة بينها بسهولة ويسر .

الجداول الإحصائية :

هى إحدى وسائل تصنيف أو تلخيص البيانات الإحصائية بسهولة ودقة وذلك فى صفات أو مجموعات متجانسة تطلق عليها إذا كانت كمية « فئات » إما إذا كانت وصفية « **صفات** » ، ويتوقف عددها على طبيعة البيانات وحجمها من ناحية ، والغرض من إعداد هذه الجداول ، والتفاصيل اللازمة لاعداد وتحليل الدراسة من ناحية أخرى ، وعليه يمكن تصنيف الجداول الإحصائية إلى نوعين اساسين هما الجداول العادية أو البسيطة، والجداول المزدوجه .

والجداول العادية ، تختص بتصنيف ظاهرة واحدة ، وتتكون من عمودين أساسين الأول منها يخصص للصفات أو الفئات والثانى لتسجيل الاعداد الخاصة التى تنتمى للصفة أو لفئة محددة بالجدول ، أما الجدول المزدوج فيختص بتصنيف ظاهرتين فى نفس الوقت ، حيث يتكون من عدد من الأعمدة وعدد من الصفوف، حيث يختص العمود الأول بالصفات أو الفئات للظاهرة الأولى كالطول أو الوزن لمجموعة من الأشخاص، أو مدة الزواج، أو عدد الأولاد لمجموعة من الأسر كظاهرة ثانية مثلاً وكل بيان من حيث الطول أو الوزن مثلاً يتم رصده فى خلايا الجدول عند ملتقى العمود والصف اللذين تعينهما الصفتان (أو الظاهرتان) موضوع الدراسة.

طرق ومعايير التبويب

هناك معايير أو أسس كثيرة ومختلفة تتخد كأساس لإجراء عملية تصنيف أو تبويب البيانات فى صورة جداول إحصائية تعتمد على طبيعة البيانات عن الظواهر المراد دراستها وتتلخص فيما يلى :

١ ـ معيار زمنى   ٢ ـ معيار جغرافى .

٣ ـ معيار نوعى .   ٤ ـ معيار كمى .

٥ ـ أو على أساس خليط من المعايير السابقة .

كما يتوقف تحديد الطريقة التى يمكن إستخدامها فى عملية تصنيف أو تبويب البيانات الاحصائية على كل من عدد الواحدات المراد تصنيفها من جهة، وطبيعة هذه الوحدات من حيث تنوعها من جهة أخرى، والامكانيات المادية والفنية المرصودة لاجراء البحث أو الدراسة من جهة أخيرة ، ووفقاً لما تقدم يمكن حصر طرق التصنيف فيمايلى :

الطريقة الأولى · التصنيف أو التبويب اليدوى

وتستخدم هذه الطريقة اذا كان عدد الوحدات المراد تبويبها محدودة ، أو إذا تواضعت الإمكانيات المادية والفنية المرصودة لإجراء الدراسة.

وتتم عملية التبويب يدويا على مرحلتين متتابعتين ، حيث يطلق على أولهما بمرحلة تفريغ البيانات ، وبمقتضاها يتم تصنيف البيانات التى إحتوتها الإستمارات الإحصائية موضوع الدراسة فى صورة مجموعات متشابهة (أو متجانسة) وهى الفئات وذلك فى جدول يطلق عليه جدول تفريغ البيانات ، وهذا الجدول مكون من عمودين الأول يخصص للمعيار المحدد لتبويب الظاهرة سواء كانت صفة أو كمية أو مكانية أو زمنية ... الخ ، فى حين يخصص العمود الثانى لتفريغ البيانات موضوع الدراسة وذلك بقراءة البيانات الأصلية (الخام)

قراءة قراءة أو بيان بيان وتسجيل كل منها أمام الصفة أو الفئة أو المعيار المتفق مع فقرتها ، وذلك بتمثيله بشرطة مائله من أعلى اليمين إلى أدنى اليسار كمايلى(/) حتى تبلغ أربع شرطات مائله ، والخامسه تكون كخط أو شرطة تقطع الأربعة السابقة فى صورة عكسية كما يلى (////\ ) والخمسة قراءات فى الصورة السابقة يطلق عليها **حزمة** ويرجع السبب فى استخدام أسلوب الحزم المشار اليه ، لتسهيل عمليه العد للمفردات أمام كل صفة أو فئة بجدول التفريغ.

ويطلق على المرحلة الثانية فى عملية تصنيف أو تبويب البيانات بمرحلة عرض البيانات فى صورة جداول إحصائية ، أو توزيعات تكرارية ، وفيها يتم ترجمة حزم أو مفردات عمود التفريغ فى جدول التفريغ أمام كل صفة أو وجه أو معيار بنفس الجدول السابق إلى « **قيم تكرارية** » بعدد المفردات أو مفردات الحزم أمام كل منها كما يتضح من الأمثلة التالية:

(أ) تصنيف البيانات الوصفية أو النوعية :

مثال (١) فيما يلى التقديرات فى مادة الإحصاء لعدد ٣٠ طالبا فى إحدى الفرق الدراسية :

ممتاز	جيد	ضعيف	مقبول	مقبول
جيد	ضعيف	ضعيف	جيد جداً	ممتاز
مقبول	جيد جداً	ضعيف	جيد	مقبول
جيد جداً	جيد جداً	جيد	مقبول	ضعيف
ممتاز	جيد	مقبول	مقبول	جيد
جيد	جيد	جيد	جيد	جيد

والمطلوب : تبويب البيانات السابقة فى صورة جدول تكرارى :

الحل :

التقديرات هنا عبارة عن صفات ، ويمكن تبويبها على أساس هذه الصفات كما يلى :

المرحلة الأولى : جـــــدول التفريغ

الصفة (التقدير)	عملية التفريغ
ممتـاز	///
جيد جداً	////
جـيـد	/ 𝍸 𝍸
مقبـول	// 𝍸
ضعيف	𝍸

المرحلة الثانيـة : جدول التوزيع التكرارى

الصفة (التقدير)	عـدد التكرارات
ممتـاز	٣
جيد جداً	٤
جـيـد	١١
مقبـول	٧
ضعيف	٥
إجمالى التكرارات	٣٠

وقد أدت عملية التبويب فى الجدول التكرارى (البسيط المطلق) السابق إلى أن البيانات الخام(الصفات) أصبحت ذات معنى أكثر أفادة عند تحليل بيانات هذه العينة من الطلاب طبقاً لخاصية التقدير فى مادة الاحصاء ، حيث أن تقسيمها إلى الفئات (الصفات) المشار إليها يمكننا من إستيعاب تلك البيانات المبوبـة ، وتحليلها ودراسة صفات الظاهرة وادراك ما تعكسه البيانات المقدمه عنها من علاقات.

ويطلق على الجدول التكرارى السابق ، بالجدول التكرارى البسيط المطلق، ويمكن تحويله إلى ، جدول تكرارى بسيط نسبى ،، وذلك بقسمة عدد التكرارات أمام كل صفة على قيمة إجمالى تكرارات الجدول البسيط المطلق كما يلى :

الصفة (التقدير)	التكرار المطلق	التكرار النسبى
ممتاز	٣	$\frac{٣}{٣٠}$ = ٠,١٠
جيد جداً	٤	$\frac{٤}{٣٠}$ = ٠,١٣
جيد	١١	$\frac{١١}{٣٠}$ = ٠,٣٧
مقبول	٧	$\frac{٧}{٣٠}$ = ٠,٢٣
ضعيف	٥	$\frac{٥}{٣٠}$ = ٠,١٧
إجمالى التكرارات	٣٠	١,ـــ

والجدول التكرارى النسبى الأخير أضاف تحليلاً جديداً لخصائص توزيع الطلبة على تقديرات النجاح المختلفة ليس على أساس مطلق ولكن على أساس نسبى أيضاً ، فيمكننا أن نقول أن هناك ٠,١٠ من مجموع الطلاب ناجح بتقدير ممتاز فى مادة الاحصاء فى حين أن ٠,٣٧ من نفس المجموع نجح بتقدير جيد وهكذا،وبنفس الأسلوب فى المثال السابق يمكننا تصنيف أو تبويب أى مجموعة من البيانات النوعية أو الوصفية مهما إختلفت طبيعة هذه الصفات فمثلاً يمكن تصنيف السكان إلى ذكور وأناث ، أو الحالة الاجتماعية إلى (متزوجون / مطلقون / أرامل / عزاب) أو طبقاً للون (أحمر / أصفر/ أبيض... الخ) بالنسبة لمجموعة من الزهور .. وهكذا .

(ب) تصنيف البيانات الكمية :

أيضاً يمكن تصنيف البيانات الإحصائية الخام عن ظواهر أو متغيرات إحصائية كمية أى التى تتخذ قيم كمية أو رقمية كمقاييس الأطوال لمجموعة من الأشخاص أو أوزان هؤلاء الأشخاص.... الخ ، والتساؤل هنا، حيث تم تلخيص مجموعة من البيانات النوعية لتقديرات النجاح فى مادة الإحصاء فى المثال السابق طبقاً لنوع التقدير .. ممتاز ، جيد جداً ... الخ ، فما هو الأساس الذى سيتم على أساسه تصنيف أو تبويب البيانات الكمية ؟ وللاجابة الدقيقة

على التساول السابق يقتضى منا الأمر أولاً التعرض لأنواع المتغيرات أو البيانات الكميـة ، حيث يمكن تقسيم المتغيرات الكميـة من حيث بعض خصائصها إلى نوعين من المتغيرات :

١ ـ المتغيرات الوثـــابة أو المنفصلة (*Discontinuous Varialbile*) :

وهى متغيرات أو بيانات عن ظواهر بطبيعتها تأخذ قيم صحيحـة فقط، وبمعنى آخر فإن مقدار الظاهرة يقفز من قيمة صحيحـة إلى قيمة صحيحـة أخرى فجأة بدون أن تتدرج إلى القيم الواقعة بينهما، أى أنها لا تأخذ قيماً كسرية، كعدد أفراد الأسرة، وعدد العمال فى مصنع، وعدد الكتب فى إحدى المكتبات .... الخ.

٢ ـ المتغيرات المتصلة أو المستمرة (*Continuous Variable*) :

وهى متغيرات أو بيانات عن ظواهر بطبيعتها تأخذ جميع القيم سواء أكانت قيم صحيحـة أو قيم كسريـة ـ فى داخل مدى معين أو بين قيمتين محددتين بالنسبة لوحدات قياس محددة ـ مثلا الأجور تكون بالجنيات أو كسروها بالقروش ، والأطوال تكون بالأمتار أو كسروها بالسنتيمترات ، والمليمترات ، ودرجات الحرارة أثناء اليوم .... الخ .

وتقوم فكرة تبويب البيانات الكميـة على أساس بسيط مؤداه تقسيم مدى القيم الأصليـة للظاهرة إلى مجموعات جزئيـة وذلك بضم بعض القيم المتقاربـة إلى بعضها البعض فى مدى بسيط نسبياً فى تتابع يطلق عليه « فئاتgroups » ويفضل أن تكون هذه الفئات متساوية ويتم ذلك عملياً وفقاً للخطوات التالية:

أولاً : تحديد مدى التغير فى البيانات الأصليـة وهو عبارة عن الفرق بين أكبر قيمة وأصغر قيمة فى مفردات الظاهرة الكميـة موضوع التبويب أى أن :

المدى = (أكبر قيمـة ـ أصغر قيمة)

ثانياً : تقسيم المدى السابق إلى عدد معقول من الفئات ، قد تكون هذه الفئات متساويـة الطول أو غير متساويـة الطول على حسب الأحوال ، مع تحديد حدود كل فئـة من هذه الفئات ــ طبقاً لخبرة الباحث ـ مع مراعاة ألا تكون

هذه الجدود متداخلة(*) من ناحيـة أو متباعدة أى يكون هناك فجوة بين كل فئـة وأخرى من ناحية أخرى ـ حتى لايحدث خطأ بالتكرار أو عدم تصنيف بعض البيانات الأصلية .

ويجب أن يراعى أن إتساع مدى الفئـة قد يضيع بعض معالم التوزيع من ناحيـة ، كما أن ضيق مدى الفئـة قد يؤدى ألا تكون هناك فائدة مرجوه من عملية التبويب من حيث تلخيص البيانات الأصليـة .

ونود أن نوجـه النظر هنا أنه لا توجـد طريقـه محـددة لتحديد العدد المناسب للفئـات ، لذلك فإن تحديد عدد الفئات يترك للتقدير الشخصى لمن يقوم بإعداد الجداول التكراريـة مراعيا فى ذلك طبيعـة البيانات الأصليـة التى نقسم مداها إلى عدد من الفئـات ، ولكن يجب ألا يكون هذا العدد مختصراً جدا بما يعمل على زيادة تلخيص البيانات الأصليـة بما يمحـو كثيراً من خصائصها، كما يجب ألا يكون عدد هذه الفئـات كبيـراً بما لايؤدى إلى تحقيق الهدف الاساسى من ذلك ، وهو العمل على تلخيص البيانات الأصلية ، لكل ما سبق يجب أن يتراوح عدد الفئـات بين ٦ ـ ٢٠ فئة (**) على حسب طبيعـة البيانات المراد تبويبها ، والغرض من عملية التبويب من ناحيـة ثانيـة .

وخارج قسمة ، مدى البيانـات الأصليـة ÷ مدى الفئـة اذا كانت متساويـة يعطينا عدد الفئـات .

ثالثاً : القيام بتسجيل القيم الأصليـة فى جدول التفريغ كل حسب الفئـة التى تتبعها باستخدام أسلوب (الحزم) وفقاً لما تم فى تبويب البيانات الوصفية فى المثال رقم (١) السابق .

رابعاً : نقوم بترجمـة عدد مفردات كل فئـة ، وعدد الحزم التى أمامها لتحديد تكرار كل فئـه ، لنصل إلى جدول التوزيع التكرارى .

(*) أن التقسيم إلى فئـات يستنفذ جميع المفردات ، وبدون تكرار لأى مفردة أمام أكثر من فئـة واحدة

(**) قاعدة (Starges Rule) لتحديد عدد الفئـات فى التوزيعات ذات القيم المتوسطه من(١٠٠ ـ ١٠٠٠) .

عدد فئـات التوزيع التكرارى = ١ + ٣,٣ لوغاريتم عدد القيم .

ولتحقيق شرطى عدم التداخل أو التباعد بين فئات الجدول التكرارى فإنه يختلف تحديد حدود الفئات فى بيانات المتغيرات المنفصلة عنه فى بيانات المتغيرات المتصلة .

(أ) المتغيرات المتصلة (أو المستمرة) *(Continuous Variable)*

اذا أخذت قيم بيانات الظاهرة جميع القيم الممكنه أى سواء أكانت قيم صحيحة أو كسرية ، فى داخل مدى معين أى بين قيمتين محددتين فإن مثل هذه الظواهر يطلق عليها إحصائياً متغيرات متصله أو مستمرة وعليه فكل من ظواهر الأجور ، والأطوال ، والأوزان ، ودرجات الحرارة على مدار يوم محدد...، تعتبر متغيرات متصله أو مستمرة ، والجدول التكرارى لها يكون متصلاً أى أن مجموع فئاته المتتالية تكون متصله أيضا، فمثلاً اذا بلغ أقل أجر يومى لعينة من العمال باحدى الصناعات ٥ جنيهات بينما بلغ أعلى أجر بنفس العينة ٥٥ جنيها وأردنا تبويب مجموعة العمال بهذه العينة طبقاً لمستويات أجورهم اليومية ، على أن يتم تلخيصها فى خمسة فئات متساوية يتم تحديد حدودها كما يلى :

$$\text{طول الفئة الواحدة} = \frac{\text{المدى}}{\text{عدد الفئات}} = \frac{٥٥ - ٥}{٥} = \frac{٥٠}{٥} = ١٠ \text{ جنيهات}$$

ويمكن كتابة حدود الفئات بالطرق التالية:

ترتيب الفئة	حدود الفئات	الطريقة (١)	الطريقة (٢)
١	٥ وأقل من ١٥	٥ ــ	٥ ــ ١٥
٢	١٥ وأقل من٢٥	١٥ ــ	ــ ٢٥
٣	٢٥ وأقل من٣٥	٢٥ ــ	ــ ٣٥
٤	٣٥ وأقل من٤٥	٣٥ ــ	ــ ٤٥
٥	٤٥ وإلى ٥٥	٤٥ ــ ٥٥	ــ ٥٥

ويلاحظ أن حدود الفئات المتتالية ليست متداخله حيث أن المتغير متصل ويطلق على الجدول التكرارى الذى حددت له كل من الحد الأدنى للعينة الأولى وهى الفئة (٥) والحد الأعلى للفئة الأخير وهى القيمة (٥٥) بالجدول التكرارى المقفل فى حين لو لم يتم تحديد الحد الأدنى للفئة الأولى بل ظلت مفتوحة بدون حدود كالأتى (ـ ١٥) أو أقل من ١٥ فى حين تم تحديد الحد الأعلى للفئة الأخيرة كالآتى (٤٥ ـ ٥٥) فيطلق على الجدول التكرارى فى الحالة السابقة بجدول تكرار مفتوح من أسفل وهناك حالات عملية تتطلب ذلك، لكن لوحدث العكس أى تم تحديد الحد الأدنى للفئة الأولى (٥ ـ) ولم يتم تحديد الحد الأعلى للفئة الأخيرة (٤٥ ـ) أو ٤٥ فأكثر فيطلق على الجدول فى هذه الحالة جدول تكرارى مفتوح من أعلى، وهناك حالات عملية تتطلب ذلك، لكن لو لم يتم تحديد الحد الأدنى للفئة الأولى والحد الأعلى للفئة الأخيرة فيطلق عليه جدول تكرارى مفتوح الطرفين، حيث هناك حالات عملية أيضاً تتطلب ذلك، وستظهر أهمية نوعية الجدول التكرارى عند إعداد الرسوم البيانيه وبعض المقاييس الاحصائية المختلفة سيرد ذكرها فيما بعد .

(ب) المتغيرات المنفصلة (الوثابة) *Discrete Varia ble*

إذا أخذت قيم بيانات الظاهرة ، قيما صحيحة فقط بحيث تقفز من قيمة إلى أخرى فجأة وبدون أن تتدرج فى القيم الواقعة بينهما، فإن مثل هذه الظواهر يطلق عليها احصائيا متغيرات منفصلة أو وثابة ، وعليه فكل من عدد العمال فى مصنع أو عدد أفراد الاسر فى منطقة ما ، وعدد الكتب فى احدى المكتبات ، تعتبر متغيرات منفصلة أو وثابة، والجدول التكرارى لها يكون منفصلاً أى أن مجموع فئاته المتتالية تكون منفصلة أيضاً ، فمثلاً إذا أردنا تصنيف مجموعة المنشآت الصغيرة فى منطقة معينة طبقاً لعدد العمال بكل منها وكانت أصغر منشأة بها ٣ عمال وأكبرمنشأة بها ٢٣ عاملاً فيمكن تبويبها فى سبعة فئات متساوية طول كل منها ٣ كمايلى :

ترتيب الفئة	حدود الفئات	ويمكن اختصار كتابتها كالآتى
١	من ٣ إلى ٥	٣ ـ ٥
٢	من ٦ إلى ٨	٦ ـ ٨
٣	من ٩ إلى ١١	٩ ـ ١١
٤	من ١٢ إلى ١٤	١٢ ـ ١٤
٥	من ١٥ إلى ١٧	١٥ ـ ١٧
٦	من ١٨ إلى ٢٠	١٨ ـ ٢٠
٧	من ٢١ إلى ٢٣	٢١ ـ ٢٣

ونلاحظ أنـه ليس هناك تداخل بين حدود الفئـات اعلاه ، وليس هناك فجوة بين حدود فئـة وحدود الفئـة التالية لها مباشرة حيث أن المتغير منفصل ، وأن أطوال الفئـات متساويـة ، لذا يطلق عليه جدول تكرارى منتظم أما اذا كانت أطوال الفئات غير متساويـة ، فيطلق عليه جدول تكرارى غير منتظم .

مثـال (٢) فيما يلى التوزيع الطولى لعدد ٥٠ تلميذاً بالسنتيمتر بفصول احدى المدارس فى العام الدراسى ١٩٩٧/٩٦ .

١٢٥	١٣٠	١٣٨	١٤٢	١٥١	١٣٤	١٤٢	١٥٤	١٣٤	١٤٢
١٣٩	١٤٠	١٥٠	١٢٦	١٥٢	١٣٨	١٤٧	١٣٥	١٥٣	١٢٨
١٣٤	١٤١	١٣٥	١٣١	١٤١	١٣٦	١٥٣	١٤١	١٣٦	١٣٢
١٣٧	١٤٤	١٤٥	١٣٧	١٤٥	١٤٦	١٢٩	١٤٦	١٣٨	١٤٨
١٤٠	١٣٣	١٤٤	١٤٥	١٤٤	١٤٠	١٣١	١٤٧	١٤٣	١٢٧

والمطلوب تبويب البيانـات السابقة فى عدد خمسـة فئـات متساويـة بجدول تكرارى منتظم مطلق ونسبى .

الحــــل :

المدى = ١٥٤ ـ ١٢٥ = ٢٩

طول الفئـة المتساوية = $\frac{٢٩}{٥}$ = ٥,٨ تقرب إلى أقرب عدد صحيح أعلى أى = ٦ سم

١ ـ جدول تفريغ البيانات

حـدود الفـئـات	عمـليـة تفـريغ البيـانـات
١٢٥ـ	ǀ 卌
١٣١ـ	ǀ 卌 卌
١٣٧ـ	卌 卌 卌
١٤٣ـ	ǀǀ 卌 卌
١٤٩ـ١٥٥	ǀ 卌

٢ ـ الجدول التكرارى

حـدود الفـئـات (للطـول)	التكرار المطلق (عدد التلاميذ)	التكـرار النسبى
١٢٥ـ	٦	٠,١٢
١٣١ـ	١١	٠,٢٢
١٣٧ـ	١٥	٠,٣٠
١٤٣ـ	١٢	٠,٢٤
١٤٩ـ١٥٥	٦	٠,١٢
إجمالى التكرارات	٥٠	١,ـ

مثــال (٣) فيما يلى عدد أيام الغيبات عن العمل لعينة من عمال احدى المنشأت تتكون من عدد ٤٠ عاملاً .

٣٤	٣٣	٤	٢٠	١٠	١٥	١٢	١٦
١٩	١٣	٢٥	١١	١٤	١٧	١٨	١
٢٧	١٩	٢٦	١٨	٢١	٢٢	٢٣	٣٠
١٦	١٥	٢٧	٢٤	٢٣	٢٢	٢١	١٢
٢٩	٢٨	٢٨	١١	١٠	١١	١٨	١٧

والمطلوب : تلخيص البيانات السابقة فى عدد سته فئات متساوية بجدول تكرارى منتظم مطلق ونسبى .

الحـــــل :

المدى = ٣٤ ـ ١ = ٣٣

طول الفئـة الواحدة = $\frac{٣٣}{٦}$ = ٥,٥ تقرب إلى ٦

وحيث أن عدد أيـام الغيـات متغير منفصل

١ ـ جدول تفريغ البيانات **٢ ـ الجدول التكرارى**

حدود الفئات	عملية تفريغ البيانات
١ ـ ٦	//
٧ ـ ١٢	~~////~~ //
١٣ ـ ١٨	~~////~~ ~~////~~ /
١٩ ـ ٢٤	~~////~~ ~~////~~
٢٥ ـ ٣٠	~~////~~ ///
٣١ ـ ٣٦	//

حدود الفئات (للطول)	التكرار المطلق (عدد التلاميذ)	التكرار النسبى
١ ـ ٦	٢	٠,٠٥
٧ ـ ١٢	٧	٠,١٧٥
١٣ ـ ١٨	١١	٠,٢٧٥
١٩ ـ ٢٤	١٠	٠,٢٥
٢٥ ـ ٣٠	٨	٠,٢٠
٣١ ـ ٣٦	٢	٠,٠٥
إجمالى التكرارات	٤٠	١,ـــ

الجداول التكراريـة غير المنتظمـة :

نظراً لأن بعض الظواهر قد يؤدى تفريغها فى فئـات منتظمـة إلى وجود بعض الفئـات بها تكرارات قليلـة وأنعدامها فى البعض الأخر لذا يفضل تفريغ مثل هذه الظواهر فى فئـات غير متساوية .

مثـال : فيما يلى جدول تكرارى عن ظاهرة وفيات الأطفال الرضع باحدى المدن طبقاً لعمر الطفل بالشهور .

فئات العمر بالشهور	التكرار (عدد الاطفال المتوفين)	طول الفئة
٠ أقل ١	١٠٠	١
١ وأقل ٣	٥٠	١
٣و أقل ٦	٢٠	٣
٦ وأقل ٩	١٥	٣
٩ وأقل ١٢	٩	٣
١٢ وأقل ٢٤	٦	١٢
الأجمالى	٢٠٠	

التوزيعات التكرارية المتجمعة : *Cumulative Frequncy distribtions*

من الجداول التكرارية المطلقة أو النسبية فى المثالين (٢) ، (٣) السابقين من السهل باستخدام هذه الجداول أن نجيب بسهوله ويسر على سؤال بعدد التلاميذ الذين تتراوح أطوالهم بين (١٣٧ ـ ١٤٣) أو نسبتهم وكذلك سؤال عن عدد العمال الذى تتروح مدة غيابهم مابين ١٩ ـ ٢٤ يوماً فى السنة أو نسبتهم، لكن ليس سهلاً باستخدام نفس الجداول تحديد عدد التلاميذ أو نسبة الذين تزيد (أوتقل) أطوالهم عن ١٣٧ ، أو عدد العمال الذين تزيد (أو تقل) مدة غيابهم عن ١٩يوماً أو نسبتهم لكن باستخدام الجداول التكرارية المتجمعه سواء الصاعدة أو الهابطة يمكننا بمجرد النظر لمثل هذه الجداول الإجابة على الأسئلة السابقة :

١ ـ الجداول التكرارية المتجمعة الصاعدة :

تتخلص الفكرة التى يقوم عليها إعداد مثل هذا النوع من الجداول على تحديد الحدود العليا بجمع الفئات الأصلية وأيضا الحد الأدنى للفئة الأولى بالجدول التكرارى الأصلى ونسبقها بكلمة « أقل من » ويتحدد التكرار المتجمع المناظر لكل فئة أصلية بجمع بيانات التكرارات من جهه الفئات الأولى الى الأخيرة بالجدول :

في المثال رقم (٢) السابق يمكن إعداد الجدول التكرارى المتجمع الصاعد المطلق والنسبى كما يلى

١ ـــ الجـدول التكرارى المتجمـع الصـاعد المطلـق

الجــــدول رقم (١)

الفئـات (ف)	التكرار المطلق (ك)	حدود الفئات	التكرار المتجمع الصاعد المطلق
١٢٥ ـ	٦	أقل من ١٢٥	صفر
١٣١ ـ	١١	أقل من ١٣١	٦
١٣٧ ـ	١٥	أقل من ١٣٧	١٧
١٤٣ ـ	١٢	أقل من ١٤٣	٣٢
١٤٩ ـ ١٥٥	٦	أقل من ١٤٩	٤٤
		أقل من ١٥٥	٥٠
اجمالى التكرارات	٥٠		

٢ ـ الجدول التكرارى المتجمع الصاعد النسبى

الجدول رقم (٢)

الفئـات (ف)	الصاعد النسبى (ك)	حدود الفئات	التكرار المجتمع التكرار النسبى
١٢٥ ـ	٠,١٢	أقل من ١٢٥	صفر
١٣١ ـ	٠,٢٢	أقل من ١٣١	٠,١٢
١٣٧ ـ	٠,٣٠	أقل من ١٣٧	٠,٣٤
١٤٣ ـ	٠,٢٤	أقل من ١٤٣	٠,٦٤
١٤٩ ـ ١٥٥	٠,١٢	أقل من ١٤٩	٠,٨٨
		أقل من ١٥٥	١ـــ
اجمالى التكرارات	١ـــ		

٢ ـ الجداول التكرارية المتجمعة الهابطة (النازلة)

وتقوم على تحديد الحدود الدنيا لجميع الفئات وأيضاً الحد الأعلى للفئة الأخيرة بالجدول التكرارى الأصلى، ونلحقها بكلمة ، فأكثر ، ويتحدد التكرار المتجمع الهابط المناظر لكل فئة أصلية بطرح تكرار الفئة الأصلية الأولى من اجمالى التكرارات ، ومن الرصيد السابق يطرح تكرار الفئة الثانية وهكذا لباقى الفئات كالأتى :

أى أنه لتكوين التوزيع التكرارى النازل نبدأ بالمجموع الكلى للتكرارات أمام الحد الأدنى للفئه الأولى ثم نطرح منه تكرار الفئة الأولى فيكون الباقى هو عدد المفردات التى أكبر من الحد الأدنى للفئة الثانية ... وهكذا مع باقى الفئات كما أن من الأفضل أن نبدأ بوضع صفر أمام الحد الأدنى للفئة الأخيرة ثم نضيف تكرار كل فئة إلى مجموع التكرارات للفئات التى أسفلها حتى نصل الى المجموع الكلى أمام الفئة الأولى .

فى المثال رقم (٢) السابق يمكن إعداد الجدول التكرارى المتجمع الهابط المطلق والنسبى كما يلى :

١ ـ الجدول التكرارى المتجمع الهابط المطلق

الجدول رقم (٣)

الفئات (ف)	التكرار المطلق (ك)	حدود الفئات	التكرار المتجمع الصاعد المطلق
١٢٥ ـ	٦	١٢٥ فأكثر	٥٠
١٣١ ـ	١١	١٣١ فأكثر	٤٤
١٣٧ ـ	١٥	١٣٧ فأكثر	٣٣
١٤٣ ـ	١٢	١٤٣ فأكثر	١٨
١٤٩ ـ ١٥٥	٦	١٤٩ فأكثر	٦
		١٥٥ فأكثر	صفر
اجمالى التكرارات	٥٠		

٢ ــ الجدول التكرارى المتجمع الهابط النسبى

الجـــــــــدول رقم (٤)

الفئـات (ف)	التكرار النسبى (ك)	حدود الفئـات	التكرار المتجمع الهابط النسبى
١٢٥ ـ	٠,١٢	١٢٥ فأكثر	١,ــ
١٣١ ـ	٠,٢٢	١٣١ فأكثر	٠,٨٨
١٣٧ ـ	٠,٣٠	١٣٧ فأكثر	٠,٦٦
١٤٣ ـ	٠,٢٤	١٤٣ فأكثر	٠,٣٦
١٤٩ ـ ١٥٥	٠,١٢	١٤٩ فأكثر	٠,١٢
		١٥٥ فأكثر	صفر
اجمالى التكرارات	١,ــ		

وعليه من واقع الجداول التكرارية المتجمعة الصاعدة والهابطة السابقة يمكن الاجابة على الأسئلة التى أثرناها فيما سبق بمجرد النظر فنجد :

ـ عدد التلاميذ الذين يقل طولهم عن ١٣٧ سم هم ١٧ تلميذاً من الجدول رقم (١).

ـ نسبة التلاميذ الذين يقل طولهم عن ١٣٧هى ٠,٣٤ من مجموع التلاميذ من الجدول رقم (٢)

ـ عدد التلاميذ الذين يزيد طولهم عن ١٣٧ سم هم ٣٣ تلميذا من الجدول رقم (٣).

ـ نسبة التلاميذ الذين يزيد طولهم عن ١٣٧ سم هى ٠,٦٦ من مجموع التلاميذ من الجدول رقم (٤) .

كما سيتم استخدام الجداول التكرارية المتجمعة السابقة عند حساب بعض المقاييس الإحصائية أو عند استخدام أسلوب المقارنة بين توزيعين مختلفين بجانب بعض الرسوم البيانية كما سيرد فيما بعد :

الجـداول التكراريـة المزدوجـة :

تستخدم الجداول التكراريـة العادية أو البسيطة سواء أكانت مطلقة أو نسبية أو متجمعة صاعدة أو هابطة لتلخيص أو تبويب البيانات عن ظاهرة واحدة سواء تعلقت هذه الظاهرة بمتغيرات متصلة أو متغيرات منفصلة لكن لو أردنا تبويب البيانـات عن ظاهرتين معاً تمهيداً للوقوف على العلاقـة بينهما، فإننـا نستخدم الجداول التكراريه المزدوجه لهذا الغرض ، وهى جداول مركبة حيث تتكون من عدد من الأعمدة وعدد من الصفوف ويحدد العمود الأول لفئـات الظاهرة الأولى، والسطر الأول لفئات الظاهرة الثانيـه على أن ـ يتم تفريغ البيانات بها كما سبق أن أوضحنا فيما سبق عند دراسة الجداول الإحصائية البسيطة، وكما سيتضح من المثال التالى فى باقى الأعمدة وباقى الصفوف.

مثال (٤) فيما يلى الإنتاجيـة والأجر اليومى ، لعدد ٣٠ عاملاً باحدى المنشآت :

الانتاج اليومى بالقطعة	الاجر اليومى بالجنيه	الانتاج اليومى بالقطعة	الاجر اليومى بالجنيه
٥٨	٩٩	٧٩	٧٦
٧١	٧٣	٨١	٧٦
٨٢	٨١	٧٢	٦٩
٦٢	٦١	٦٣	٦٦
٨٣	٨٦	٨٤	٨٣
٥١	٥٦	٦٤	٦١
٧٤	٧٦	٨٥	٨٢
٩١	٩٣	٥٤	٥١
٧٥	٧٣	٧٢	٦٦
٩٢	٩٣	٨٦	٨٧
٧٦	٧١	٥٧	٥٣
٧٧	٧٢	٨٧	٨٢
٩٦	٩٤	٦١	٥٨
٧٧	٧٣	٥١	٥٠
٧٩	٧٨	٦٠	٧٠

والمطلوب : إعداد جدول تكرارى مزدوج للظاهرتين السابقتين من خمسة فئات متساوية للظاهرتين :

الحل :

مدى ظاهرة الإنتاج = ٩٦ ـ ٥٠ = ٤٦

مدى ظاهرة الأجر = ٩٩ ـ ٥١ = ٤٩

طول فئة الإنتاج = $\frac{٤٦}{٥}$ = ٩,٢ ترفع إلى ١٠

طول فئة الأجر = $\frac{٤٩}{٥}$ = ٩,٨ ترفع إلى ١٠

أولاً : جدول تفريغ البيانات

فئات الأجر / فئات الانتاج	٥٠ـ	٦٠ـ	٧٠ـ	٨٠ـ	٩٠ـ ١٠٠
٥٠ـ ٥٩	////				/
٦٠ـ ٦٩	/	///	/		
٧٠ـ ٧٩		//	/// ~~////~~		
٨٠ـ ٨٩			/	/ ~~////~~	
٩٠ـ ٩٩					///

ثانياً : الجدول التكرارى المزدوج

فئات الأجر / فئات الانتاج	٥٠ـ	٦٠ـ	٧٠ـ	٨٠ـ	٩٠ـ	اجمالى التكرارات
٥٠ـ٥٩	٤				١	٥
٦٠ـ٦٩	١	٣	١			٥
٧٠ـ٧٩		٢	٨			١٠
٨٠ـ٨٩			١	٦		٧
٩٠ـ٩٩					٣	٣
إجمالى التكرارات	٥	٥	١٠	٦	٤	٣٠

وليس شرط أن يكون عدد فئات الظاهرة الأولى فى الجدول التكرارى المزدوج مساويا لعدد الفئات للظاهرة الثانية أو أن يكون طول الفئات بهما متساوية ، لكن من الممكن أن يختلف كل من حدود الفئات أو طول الفئة أو كلاهما فى ظاهرةعن الأخرى على حسب طبيعة البيانات أو طبقاً لما يتراءى للدارس فى هذا المجال.

الطريقة الثانيـة : التصنيف أو التبويب الآلى :

وتستخدم هذه الطريقة إذا كان عدد البيانات المراد تصنيفها أو الأسئله عنها كبيراً من ناحيـة ، وتوافرت الإمكانيات المادية والفنيـة المرصودة لأعداد الدراسة من ناحيـة أخرى، والألمام بنواحى فنيه أخرى تختلف من حاله لأخرى ويختلف الاسلوب المستخدم فى هذه الطريقة على حسب نوعيـة الآلات المتوافرة .

---

(١) مثل الات شركات I.B.M ، ورميخنون راند .

الأسلوب الأول : وفيه تستخدم الآت تقليديه كألات الترميز والتى بمقتضاها نستبدل البيانات الاحصائية برموز فى صورة رقمية ويتم نقلها على بطاقات مخصصه لهذا العرض يطلق عليها الآت تثقيب البطاقات تسهل لنا عملية تثقيب مثل هذه البطاقات فى صورتها الجديدة ، وألات اخرى تساعد على مراجعتها كما توجد آلات أخرى لفرز مثل هذه البطاقات المثقوبه وتبويبها فى جداول تكرارية تتناسب مع البيانات الخام ويتم كل ذلك بعناية ودقة وسرعة كبيرة نسبياً عنه فى الطريقة اليدوية .

الأسلوب الثانى : وفيه تستخدم ألات الكترونية حديثة تتميز بالكفاءة والسرعة الهائله والقيام بعمليات كثيرة ومتنوعة فى وقت واحد من إدخال وتثقيب وفرز وتبويب وتحليل وإخراج للنتائج ، تمهيد الاتخاذ القرارات فى وقت وبمجهود بسيط جداً بالقياس للطرق والوسائل الأخرى أى بإستخدام البطاقات المثقوبه الورقيه أو المغناطيسيه أو باستخدام البطاقات الممغنطه أو الحبر الممغنط ، وكل ذلك يقتضى الإلمام بلغات خاصه بالحاسبات الالكترونية كلغة الفورتران ، ولغة الكوبول.... الخ، ولغة لكتابه البرامج واعطاء التعليمات مع امكانية مراجعة البرامج ومتابعتها ، وأيضاً الالمام بمكونات الحاسبات من وحدات إدخال أو وحدات تخزين أو وحدات رقابة أو وحدات إخراج للنتائج .

كما انه مع التطور المستمر لعلوم الحاسب ووسائل الاتصال اصبح لدي الكثير من المنشآت القدرة علي الحصول علي معلومات آنية عن أنظمتها الداخلية وكذلك من البيئة المحيطة بها عن طريق بناء " تنظيم إدارة قواعد بيانات متطورة " والاشتراك في شبكة معلومات باستخدام برامج إحصائية جاهزة من أهمها . Mintap /spss / sAs / B MDP/ Instat

المبحث الثاني

العرض البياني للبيانات الاحصائية

يعتبر العرض البياني - أى الرسوم البيانية - وسيلة أخرى لتلخيص وعرض البيانات الإحصائية ، خاصة أنها أسهل إستيعاباً وأكثر سهولة وجاذبية للقارئ العادى عنه فى اسلوب العرض الجدولى ، هذا بالإضافة الى أن بعض الرسوم البيانية يساعد فى اجراء بعض التحليلات الإحصائية كما سيرد فيما بعد.

وتختلف أشكال العرض البيانى ، لإختلاف نوعية البيانات الإحصائية ، ولإختلاف وظيفته التوضحية لمن سيطلع عليه . ذلك لأن الهدف من الرسم البيانى لا يمكن تحقيقة إلا بإختيار الرسم المناسب ، فهناك رسوم يكون هدفها إبراز طريقة التغير فى الظواهر موضوع الدراسة خلال فترة زمنية محددة ، وأخرى يكون هدفها بيان ظاهرة كلية إلى أجزائها المختلفة فى فترة وليكن عام محدد ، أو أن يبرز الرسم البيانى هذا التقسيم فى عدة أعوام متتاليه. فيتضح التغير فى تركيب الظاهرة من عام لآخر مثلاً .

لكل ما تقدم تختلف أشكال العرض البيانى للبيانات النوعية (غير المبوبة) عنه فى البيانات التكرارية (المبوبة)

أهم أشكال العرض البياني للبيانات النوعيـة (غير المبوبة) Nomenal Deta.

أولاً : الأعمدة أو المستطيلات البيانية (Bar Chart)

وعادة مايستخدم هذا الشكل لتحليل بيانات متصلة أو منفصلة وهدفها إبراز قيم ظاهرة فى عدد من السنوات أو فى عدة أماكن مختلفة ، أو لأبراز ظاهرتين أو أكثر لعدد من السنوات أو فى أماكن مختلفة أو لإبراز التغير فى ظاهرة ما سواء كان تغيراً موجباً أو سالباً .... الخ ، وهناك أكثر من نوع من هذه الأعمدة وفى كل الأنواع يجب مراعاة مايلى:

١ - يجب أن يتم الرسم البيانى على محورين متعامدين أحدهما المحور الأفقى (س) ويخصص دائما للمتغير المستقل. والآخر للمحور الرأسى (ص) ويخصص للمتغير التابع، على أن تمثل الأوجه المختلفة للظاهرة وقد تكون

سنوات، صفات أو فئات، كقواعد متساوية للأعمدة على المحور الأفقى، على أن تمثل الظاهرة نفسها كإرتفاع (للأعمدة) على المحور الرأسى على أن يبدأ المقياس المدرج على المحور الرأسى – من (الصفر) دائماً – حتى تتناسب مساحة الأعمدة مع أرتفاعاتها أى مع الأرقام الحقيقية التى تمثلها الظاهرة موضوع الدراسة ، على أن يتم كل ذلك بمقياس رسم – مناسب – يفضل أن يوضح بجانب الرسم – بما يعمل على تسهيل اجراء المقارنات المختلفة بين قيم هذه الظاهرة فى الأزمنة أو الأمكنه المختلفة .

٢ ـ يجب أن توضح الأعمدة ، على الرسم بطريقة مناسبة ويفضل أن يترك مسافة بين كل عمودين متجاورين تعادل ١/٢ قواعد هذه الأعمدة، على أن يكتب اسم كل وجه من أوجه الظاهرة فى أسفل العمود الذى يمثلها.

٣ ـ إذا ما كانت قيم بعض السنوات أو الأمكنه متطرفة وبالتالى سيكون إرتفاع العمود الذى تمثله شاذا ـ وفقا لمقياس الرسم المختار ـ فإنه فى مثل هذه الحالات يمكننا كسر ذلك العمود قرب قمته بطريقة غير منتظمة هكذا ( ) وكتابة قيمتة العدديه أعلاه .

٤ـ يتم كتابة كل من موضوع ومكان وزمان البيانات التي تمثل الشكل بعنوان يكتب عادة أعلاه ، علي أن يكتب مصدر هذه البيانات اسفل الشكل .

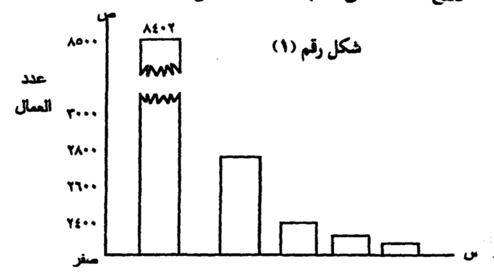
(أ) الأعمدة البيانيــة البسيطة :

وتستخدم إذا كان هناك سلسلة من القيم لظاهرة واحدة ذات أوجه مختلفة أو لعدد من السنوات أو الأمكنة المختلفة ، ويراد عرضها بواسطة الأعمدة، وحتى يتم إستيعاب تطور بيانات الظاهرة بسرعة بمجرد النظر إليها تمثل بمجموعة من الأعمدة المتجاورة بشكل مناسب على أن تمثل السنوات أو الأمكنه على المحور الأفقى كقواعد متساوية لهذه الأعمدة ، بينما تمثل قيم الظاهرة على المحور الرأسى كارتفاعات لهذه الأعمدة ويتضح لنا ذلك من الأمثلة التالية :

مثـــال (١) : الجدول التالى يوضح توزيع عدد المنشأت بالمملكه العربية السعودية حسب عدد العمال بالمنشأة حتى ١٠٠ عامل فى عام ١٤١٢ هـ والمطلوب تمثيل ذلك بيانياً فى شكل أعمدة بسيطة .

فئات العمال	١-١٩	٢٠-٣٩	٤٠-٥٩	٦٠-٧٩	٨٠-١٠٠
عدد المنشـأت	٨٤٠٢	٢٧٧٣	١١٨٩	٦٦٦	٤٧١

توزيع المنشأت على حسب فئات العمال عن سنة ١٤١٢هـ .

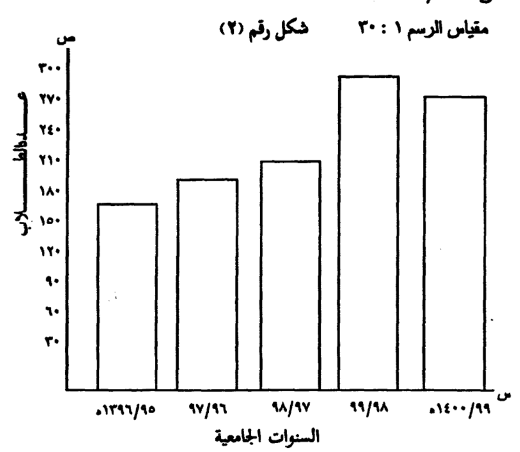


مثـــال (٢) : فيما يلى عدد الطلبه الخريجين بكلية العلوم الاداريـة - جامـعة الملك سعود فى الفتـرة من العام الجـامعى ٩٥/١٣٩٦ هـ حتـى العام الجامعى ٩٩/١٤٠٠ هـ .

العـام الجامعى	٩٥/٩٦	٩٦/٩٧	٩٧/٩٨	٩٨/٩٩	٩٩/١٤٠٠هـ
عدد الطلاب	١٧٦	١٨٤	١٩٤	٢٧٧	٢٦٩

المطلوب : تمثيل ذلك بيانيا فى شكل أعمدة بسيطة

عدد الطلبة المقيدين بالكلية فى الفترة من العام الجامعى ١٣٩٦/٩٥ هـ حتى ١٣٩٩/١٤٠٠ هـ .



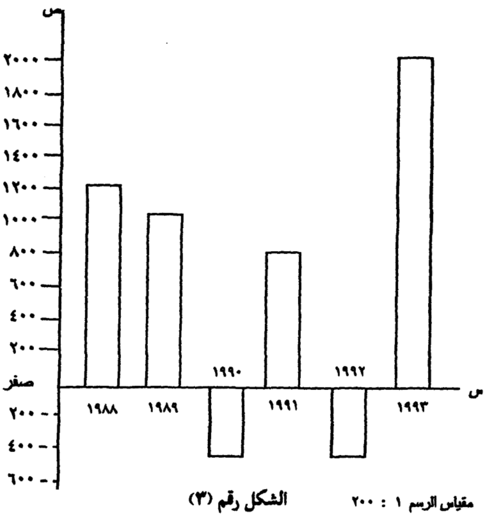
المصدر : دليل كلية العلوم الإدارية ١٤٠٠ ـ ١٤٠١ هـ

وهناك بيانات بعض الظواهر التى تكون موجبة فى بعض الأحيان وسالبه فى أحيان أخرى وكأمثلة لذلك ، نتيجة أعمال احدى الشركات قد تكون ربح (موجب) أو خسارة (سالب) خلال عدة سنوات متتالية ، أو بيانات التصدير والاستيراد لدولة ما فى عدة سنوات ، والميزان التجارى لاحدى الدول فى فترة محددة كفائض أو عجز، هنا يمكن تمثيل قيم هذه الظواهر بأعمدة بسيطة أيضاً على أن تمثل القيم الموجبة بأعمدة ترسم أعلى محور السينات بينما يتم تمثيل القيم السالبة بأعمدة ترسم أسفل محور السينات بنفس مقياس الرسم.

مثـــال (٣) : فيما يلى بيان صافى الربح أو الخسارة بالألف جنيه خلال السنوات ١٩٨٨ حتى ١٩٩٣ لإحدى الشركات ، مع ملاحظة أن الخسارة ستمثل بقيم سالبـة .

السنـة	١٩٨٨	١٩٨٩	١٩٩٠	١٩٩١	١٩٩٢	١٩٩٣
نتيجه الأعمال	١٢٠٠	١٠٠٠	(-٣٥٠)	٨٠٠	(-٤٠٠)	٢٠٠٠

المطلوب : تمثيل تلك البيانات بيانياً فى صورة أعمدة بسيطة .



الشكل رقم (٣)

(ب) الأعمـدة البيانيـة المزدوجـة (المتلاصـقة) :

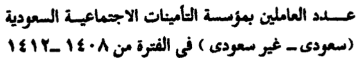
وتستخدم اذا كانت هناك سلسلتين أو أكثر من القيم لظاهرتين أو أكثر أو لظاهرة ذات عدة أوجه مختلفة في عدد السنوات، أو الأماكن المختلفة ... الخ، وهنا يتم تمثيل كل سنه أو مكان أو وجه من أوجـه الظاهرة بعمودين أو أكثر متلاصقين ، وهكذا بالنسبة للأوجه أو السنوات أو الأماكن الأخرى ، بحيث يكون طول كل عمود منها متناسباً مع القيمة التى تمثلها كل ظاهرة أوجه ولسهولة إجراء المقارنات يمكن تظليل أيهما أو إعطاء كل منها لون مختلف عن الآخر ويتضح ذلك من المثال التالى .

مثـــال رقم (٤) : فيما يلى عدد العاملين بالمؤسسة العامة للتأمينات الإجتماعية على حسب الجنسية خلال الفترة من ١٤٠٨ هـ حتى ١٤١٢ بالمملكة العربية السعودية .

السنـــة		١٤٠٨	١٤٠٩	١٤١٠	١٤١١	١٤١٢
عدد	غير سعودى	١٠١	٩٤	٩٢	٨١	٥٩
	سعودى	١٣٦٢	١٣٨٢	١٣٢٢	١٤١٣	١٣٩٩

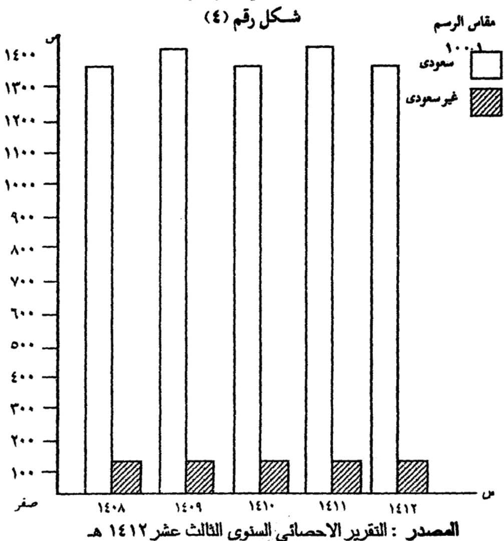
المطلوب : تمثيل ذلك بيانياً فى صورة أعمدة مزدوجه .

الحـــل :



عــــدد العاملين بمؤسسة التأمينات الاجتماعيــة السعودية
(سعودى ـ غير سعودى) فى الفترة من ١٤٠٨ ـ ١٤١٢

شــكل رقم (٤)



المصدر : التقرير الاحصائى السنوى الثالث عشر ١٤١٢ هـ

جـ ـ الأعمدة البيانيـة المجزأة (المركبة) :

وعادة ما تستخدم اذا كانت هناك ظاهرة ما تتكون جملتها من عدة أجزاء من نوعيات مختلفة فمثلاً اجمالى عدد السكان فى بلد أو منطقة ما تتكون من جزء من السكان الذكور ، وجزء آخر من السكان الأنـاث،أيضا عدد الطلبة بجامعة أو كلية ما تتكون من جزء من الطلاب الذكور والجزء الآخر من

الطالبات، كما أن إجمالى الاستيراد فى عام ما لبلد ما يتكون من جزئيات من البضائع المختلفة؛ ويمكن إيضاح هذه الجزئيات المختلفة فى عدة سنوات متتالية أو أماكن مختلفة فى شكل عمود واحد لكل سنه أو مكان على أن يتكون هذا العمود من عدة جزئيات تجميعية مميزة على حسب الأحوال ، وهنا يمكن :

١ ـ مقارنة الأعمدة المقابلة ببعضها البعض من ناحية ، ومقارنة الأجزاء المتشابهة فى كل عمود من ناحية أخرى، وللايضاح يتم تظليل أو تلوين كل جزء بشكل أو لون يختلف عن الجزء الآخر، ويتضح ما تقدم من المثال التالى:

مثـــال (٥) :

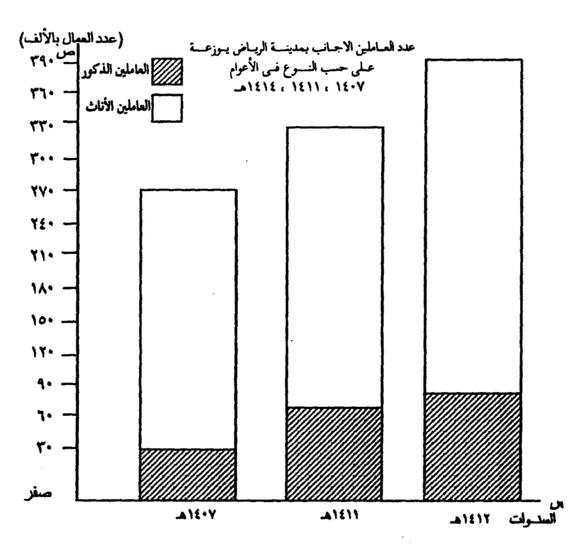
فيما يلى اجمالى العمالة الأجنبية بمدينة الرياض عن الأعوام ١٤٠٧، ١٤١١ ، ١٤١٢هـ موزعة على حسب النوع.

النوع / السنة	١٤٠٧هـ	١٤١١هـ	١٤١٢هـ
ذكـــور	٢٣٥٦٣٩	٢٥٨٤٦٢	٢٧٩٣٧٤
إنـــاث	٣٧٩٧٩	٧٢١٣٥	٧٧٩٧٢

المطلوب : تمثيل ذلك بيانياً فى شكل أعمدة مجزأة

الحــــل :

مقياس الرسم ١ : ٣٠ ألف



شكل رقم (٥)

المصدر : التقرير السنوى للغرفة التجارية الصناعية بالرياض ١٤١٣/١٩١٢هـ .

ويلاحظ أن طول العمود الكلى يمثل جملة العاملين ، بينما يمثل الجزء المظلل عدد العاملين الأنـاث، والجزء غير المظلل عدد العاملين الذكور.

الخط البيانى (Line Chart) :

وعادة ما يستخدم لتوضيح سير ظاهرة ما خلال فترة زمنية محددة ، فنقوم برسم خطين أو محورين متعامدين، يختص الأُفقى منها للتعبير عن الزمن، بينما

يختص الرأسى منها لقياس التغير فى الظاهرة عن الفترات الزمنيـة المختلفة على أن تحدد قيم الظاهرة بنقاط فى المستوى المحصور بين المحورين بقيمتين أحدهما مقيسه على المحور الأفقى والأخرى على المحور الرأسى (الإحداثيات) ولو تم توصيل هذه النقاط بخطوط مستقيمـة فإننا نحصل على شكل نطلق عليه « الخط البيانى ».

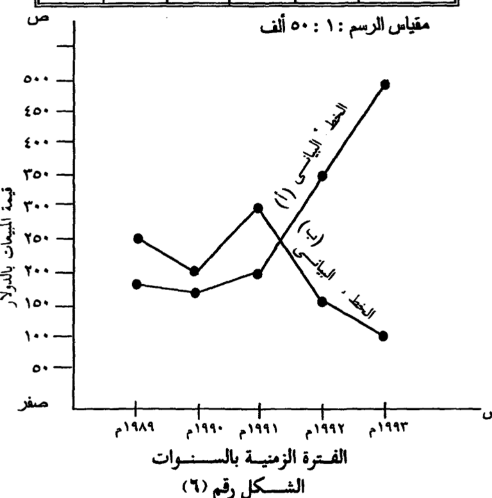
كما يصلح الخط البيانى أيضا لمقارنـة ظاهرتين أو أكثر بالنسبة للزمن أو كظاهرة مشتركة ، حيث يتم تخصيص خط بيانى لكل ظاهرة أو متغير مع تمييز كل منها عن الأخرى باحدى طرق الرسم المستخدمة وليكن اللون مثلاً.

ويتضح لنا ما تقدم من الأمثلة التالية :

مثـــال (٦) :

فيما يلى المبيعات لمحلات إدريس لكل من الفرعين أ ، ب بالألف دولار في المدة من ١٩٨٩ م حتى ١٩٩٣ م والمطلوب تمثيل ذلك بيانياً فى صورة خط بيانى.

الســنــة	١٩٨٩م	١٩٩٠م	١٩٩١م	١٩٩٢م	١٩٩٣م
الفـرع أ	١٨٠	١٦٥	٢٠٠	٣٥٠	٥٠
الفرع ب	٢٥٠	٢٠٠	٣٠٠	١٥٠	١٠٠

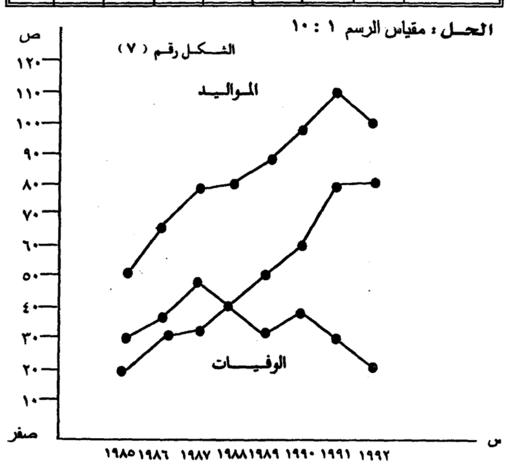


الشـــكل رقم (٦)

مثـــال (٧) فيما يلى عدد المواليد وعدد الوفيات فى إحدى القرى خلال الفترة الزمنيـة من ١٩٨٥م حتى ١٩٩٢م ، المطلوب تمثيل ذلك بيانياً فى صورة خطوط بيانيه مع أستنتــاج الظاهـرة المشتركة بينهم .

السنــة	١٩٨٥م	١٩٨٦م	١٩٨٧م	١٩٨٨م	١٩٨٩م	١٩٩٠م	١٩٩١م	١٩٩٢م
الوفيات	٥٠	٦٥	٧٦	٨٠	٨٥	٩٥	١١٠	١٠٥
المواليد	٢٠	٣٠	٣٢	٤٠	٣٠	٣٥	٣٠	٢٥
عدد الباقين على قيد الحياة	٣٠	٣٥	٤٤	٤٠	٥٠	٦٠	٨٠	٨٠

الحــل : مقياس الرسم ١ : ١٠



شكل الدائرة :

ويمقتضى هذا الأسلوب للتمثيل البيانى ، تستخدم فيه المساحات بدلا من الخطوط البيانية أو الأعمدة لتمثيل البيانات، ففيه تكون مساحة القطاعات الدائرية متناسبة مع الأرقام أو القيم التى تمثلها.

وفيه أيضاً تمثل جملة الظاهرة بمساحة دائرة كاملة على أن تمثل القيم الجزئية التى تتكون منها جملة الظاهرة بقطاعات دائرية ، حيث تتلاقى هذه القطاعات الدائرية عند مركز هذه الدائرة ، ويجب أن تتناسب مساحة كل قطاع دائرى مع المقادير الجزئية المكونة للظاهرة ، مع مراعاة تمييز كل قطاع منها بلون أو أشكال زخرفية مختلفة لزيادة الإيضاح .

وعليه فإن الشكل البيانى للدائرة يمكن أن يستخدم لتمثيل بيانات مكونه من مجموع عام لظاهرة ما ، وفيه يقسم المجموع العام المشار اليه إلى أجزاء، ومن ذلك يمكن مقارنة البيانات الجزئية لمجموع الظاهرة على أساس نسبى .

مثـــال (٨) :

الجدول التالى يوضح توزيع منشأت القطاع الخاص باحدى المدن موزعة على مناطقها المختلفة عام ١٩٩٥ .

المنطقة	الشرقية	الغربية	الشمالية	الجنوبية	الإجمالى
عدد المنشأت	٣٤٢٠	٥٢٦٩	٤١٥٣	١٤٤٧	١٤٢٦٩

المطلوب : تمثيل ذلك بيانياً فى شكل دائرة

الحـــل :

أولاً : يتم تحويل القيم المطلقة إلى نسب مئوية (بقسمة عدد المنشأت فى كل منطقة على اجمالى المنشأت بالمدينة) .

$$\text{اى النسبة المئوية لأى جزء} = \frac{\text{قيمة الجزء}}{\text{قيمة اجمالى الظاهرة}} \times ١٠٠$$

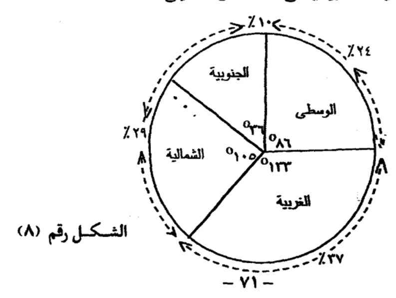
ثانياً : تحويل النسب المئوية فى(أولاً) إلى زوايا قطاعية – من زاوية مركزية للدائرة قدرها ٣٦٠° – تتناسب كل منها مع النسبة المئوية لكل جزء .

أى أن : الزاوية القطاعية لأى جزء = ٣٦٠° × النسبة المئوية للجزء.

ويوضح الجدول التالى الخطوات المطلوبة فى (أولاً) (وثانيا) .

المنطقة	عددالمنشأت	النسبة المئوية لعدد المنشأت	زاوية قطاعية
الشرقية	٣٤٢٠	$\frac{٣٤٢٠}{١٤٢٨٩} \times ١٠٠ = ٢٤\%$	$٣٦٠° \times \frac{٢٤}{١٠٠} = ٨٦°$
الغربية	٥٢٦٩	$\frac{٥٢٦٩}{١٤٢٨٩} \times ١٠٠ = ٣٧\%$	$٣٦٠° \times \frac{٣٧}{١٠٠} = ١٣٣°$
الشمالية	٤١٥٣	$\frac{٤١٥٣}{١٤٢٨٩} \times ١٠٠ = ٢٩\%$	$٣٦٠° \times \frac{٢٩}{١٠٠} = ١٠٥°$
الجنوبية	١٤٤٧	$\frac{١٤٤٧}{١٤٢٨٩} \times ١٠٠ = ١٠\%$	$٣٦٠° \times \frac{١٠}{١٠٠} = ٣٦°$
الاجمالى	١٤٢٨٩	١٠٠٪	٣٦٠°

ويمكن تمثيل ذلك بيانيا فى شكل دائرة كمايلى :



الشكل رقم (٨)

اذا كان عدد الأجزاء لظاهرة ما كبير ا ، فلا يفضل استخدام شكل الدائرة لتمثيل مثل هذه الظاهرة بيانياً ، لتعذر التمييز الواضح بسهولة لكل قطاع دائرى فيها وهو الهدف الاساسى للتمثيل البيانى ، وعليه فى مثل هذه الحالات يستحسن استخدام شكل الأعمدة المجزأة .

التمثيل البيانى للتوزيعات التكرارية (المبوبه)

المتغيرات المتصلة :

(أ) المدرج التكرارى : Histogram

هو عبارة عن شكل مدرج يشبة تدرج السلم ، ويمثل التوزيع التكرارى فى الجدول التكرارى فى شكل رسم بيانى أو هندسى ، وبمعنى آخر هو عبارة عن عدة أعمدة متلاصقة تتناسب أطوال كل منها مع تكرارات كل فئة تكرارية شريطة أن تمثل قواعد هذه الأعمدة أطوال فئات هذا التوزيع .

وعلية فإنه يمكن تمثيل كل فئة تكرارية بعمود ، قاعدته هى طول هذه الفئة ، وأرتفاعة عبارة عن تكرار نفس الفئة ، وسنفرق هنا بين مدرج تكرارى يمثل توزيع منتظم ، وآخر يمثل توزيع تكرارى غير منتظم .

أولاً : حالة التوزيع التكرارى المنتظم .

١ ـ نرسم محورين متعامدين أحدهما محور الصادات (الرأسى) وتمثل عليه التكرارات الأصلية للظاهرة موضوع التمثيل البيانى ،وذلك بمقياس رسم مناسب ، ولابد أن يبدأ المقياس من الصفر .

٢ ـ ومحور السينات (الأفقى) وتمثل عليه الفئات المختلفة للتوزيع التكرارى بمقياس رسم مناسب أيضاً، وليس من الضرورى أن يبدأ تدريجه من الصفر، ولكن من فئة سابقة لأدنى فئات التوزيع التكرارى.

٣ ـ نقيم أعمدة (مستطيلات) متلاصقة على المحور الأفقى (س) ذات قواعد متساوية (تمثل أطوال الفئات) ، على أن يمثل طول كل عمود (أو مستطيل) منه التكرار المناظر لكل فئة على المحور الرأسى (ص) .

ولما كانت قواعد المستطيلات متساوية لتساوى أطوال الفئات هنا ستكون النسب بين إرتفاعات هذه المستطيلات تساوى النسب بين تكرارات هذه الفئات وتساوى أيضاً النسب بين مساحات هذه المستطيلات ، وبالتالى تكون مساحات تلك المستطيلات تساوى فى مجموعها المجموع الكلى للتكرارات ، ويشترط هنا أن يكون التوزيع التكرارى مقفلاً حتى لا نهمل تمثيل الفئات المفتوحة به .

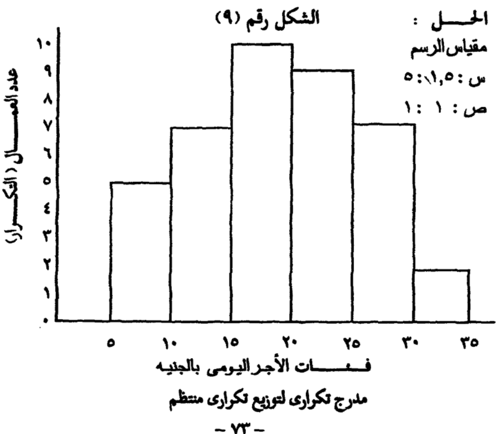
مثـــال (٩) :

فيما يلى جدول تكرارى يوضح توزيع الأجر اليومى بالجنيه لعدد ٤٠ عاملاً فى أحد المصانع ، والمطلوب تمثيله بيانياً فى صورة مدرج تكرارى.

فئـات الأجر بالجنية	٥ـ	١٠ـ	١٥ـ	٢٠ـ	٢٥ـ	٣٠ـ ٣٥
عدد العمال (التكرار)	٥	٧	١٠	٩	٧	٢

الحـــل :

الشكل رقم (٩)



مدرج تكرارى لتوزيع تكرارى منتظم

ثانياً : حالة التوزيع التكرارى غير المنتظم :

وفية يكون أطوال الفئات غير متساوية ، وبالتالى ستكون أطوال (قواعد) المستطيلات غير متساوية ، ومن ثم لن تتناسب مساحة المستطيلات مع التكرارات الأصلية (أرتفاعات المستطيلات فى هذه الحالة) ، وحتى تظل مساحة المستطيلات متناسبة مع أرتفاعاتها (أى التكرارات) فندخل التعديل التالى على التوزيع التكررى الأصلى قبل الرسم لنصل إلى ما سنطلق عليه التكرار المعدل الذى سيتخذ أساساً لرسم المدرج التكرارى .

$$\text{التكرار المعدل (الجديد) ك}' \text{لأى فئة} = \frac{\text{التكرار الأصلى للفئة}}{\text{طول الفئة المقابلة له}} = \frac{\text{ك}}{\text{ل}}$$

مثال (١٠) فيما يلى جدول يمثل توزيع الدخول اليومية بالجنيه لعدد ٥٤٠ من العائلات بأحدى المدن .

الدخل اليومى بالجنية	الفئات(ف)	١٠ــ	١٨ ــ	٢٢ـ	٢٨ـ	٣٤ـ	٤٠ ــ ٥٠
عدد العائلات	التكرارات (ك)	٤٠	٨٠	٩٠	١٢٠	١٨٠	٣٠

والمطلوب تمثيل ذلك بيانياً فى صورة مدرج تكرارى :

الحـــــل :

حيث أن أطوال فئات الدخل غير متساوية ، بل مختلفة الأطوال فطولها فى الأولى (٨) ، والثانية (٤) والثالثة والرابعة والخامسة (٦) والخامسة (١٠) فالتوزيع التكرارى غير منتظم .

وعليه فقبل تمثيله فى صورة مدرج تكرارى وحتى تتناسب مساحات المستطيلات مع تكراراتها المناظرة فيجب الوصول إلى التوزيع التكرارى المعدل وفقاً لمايلى :

ف	التكرار الاصلى(ك)	أطول الفئات(ل)	التكرار المعدل (كَ)
١٠ _	٤٠	٨	$\frac{٤٠}{٨}$ = ٥
١٨ _	٨٠	٤	$\frac{٨٠}{٤}$ = ٢٠
٢٢ _	٩٠	٦	$\frac{٩٠}{٦}$ = ١٥
٢٨ _	١٢٠	٦	$\frac{١٢٠}{٦}$ = ٢٠
٣٤ _	١٨٠	٦	$\frac{١٨٠}{٦}$ = ٣٠
٤٠ _ ٥٠	٣٠	١٠	$\frac{٣٠}{١٠}$ = ٣
الإجمالى	٥٤٠		



مدرج تكرارى لتوزيع تكرارى غير منتظم

(ب) المضلع التكرارى : ***Frequency polygon***

هو عبارة عن الخط المنكسر الواصل بين مراكز الفئات العليا للمدرج التكرارى (الموضح فى الشكل ١٠ السابق) .

أو الخط المنكسر الواصل بين إحداثيات مراكز الفئات المختلفة ، والتكرارات الأصلية أو المعدله المناظره لكل مركز فئة أى يمكن أن نصل إلى شكل المضلع التكرارى باحدى طريقتين .

الطريقة الأولى :

تحدد مراكز القواعد العليا للمدرج التكرارى ثم نصل نقطة كل مركز منه بنقطة المركز الذى يليه بخط مستقيم .. وهكذا، ولإقفال الشكل نفترض أن هناك فئة سابقة للفئة الأولى بنفس طول الفئة الأولى وتكرارها = صفر ، وفئة أخرى لاحقة للفئة الأخيرة بنفس طولها وتكرارها = صفر .

علماً بأن :

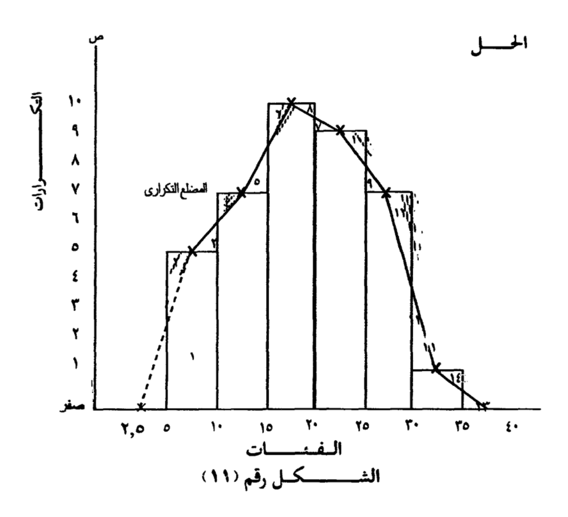
$$\text{مركز أى فئة} = \frac{\text{الحد الأدنى للفئة + الحد الأعلى لنفس الفئة}}{٢}$$

$$\text{أو مركز الفئة} = \text{الحد الأدنى للفئة} + \frac{\text{طول الفئة}}{٢}$$

$$\text{أو مركز الفئة} = \text{الحد الأعلى للفئة} - \frac{\text{طول الفئة}}{٢}$$

مثال (١١) مثل بيانات المثال رقم (٩) السابق فى صورة مضلع تكرارى .

الحـــل



الشـــكـل رقم (١١)

وقد تم الوصول إلى المراكز العليا للفئات كمايلى :

حيث أن مركز ف$_{١}$ = $\frac{١٠ + ٥}{٢}$ = ٧,٥

حيث أن مركز ف$_{٢}$ = $\frac{١٥ + ١٠}{٢}$ = ١٢,٥

حيث أن مركز ف$_{٣}$ = $\frac{١٥ + ٢٠}{٢}$ = ١٧,٥

حيث أن مركز ف$_{٤}$ = $\frac{٢٠ + ٢٥}{٢}$ = ٢٢,٥

حيث أن مركز ف$_{٥}$ = $\frac{٢٥ + ٣٠}{٢}$ = ٢٧,٥

حيث أن مركز ف$_{٤}$ = $\frac{٣٠ + ٣٥}{٢}$ = ٣٢,٥

مركز الفئة السابقة للفئة الأولى = $\frac{٠ + ٥}{٢}$ = ٢,٥

مركز الفئة اللاحقة للفئة الأخيرة = $\frac{٣٥ + ٤٠}{٢}$ = ٣٧,٥

الطريقة الثانيــة :

١ ـ نحـدد المراكـز السفلى (للفئـات) على المحـور الأفـقى (س) مع أفتراض أن هناك فئة سابقـة للفئـة الأولى بنفس طولها وتكرارها = صفر ، وفئـة لاحقة للفئـة الأخيـرة بنفس طولها وتكرارها = صفر .

والمراكز السابقة هى :

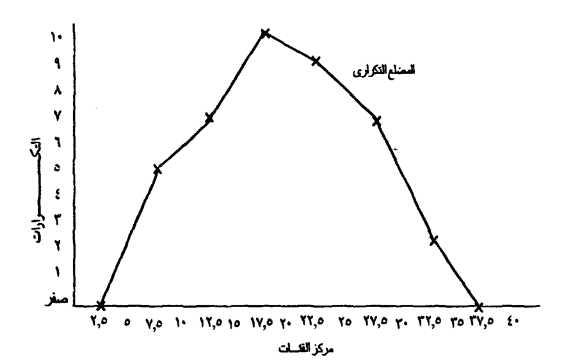
٢,٥ ، ٧,٥ ، ١٢,٥ ، ١٧,٥ ، ٢٢,٥ ، ٢٧,٥ ، ٣٢,٥ ، ٣٧,٥ على الترتيب.

٢ ـ نحدد أمام كل مركز فئـة ، نقطة تقابل تكرار تلك الفئة وهى فى مثالنا صفر ، ٥ ، ٧ ، ١٠ ، ٩ ، ٧ ، ٢ ، صفر) على الترتيب على المحور الرأسى (ص) .

٣ ـ طبقاً لمثالنا رقم (٩) السابق يكون إحداثى النقط (س، ص) كالأتى على الترتيب .

(٢,٥ ، صفر) ، (٧,٥ ، ٥) ، (١٢,٥ ، ٧) ، (١٧,٥ ، ١٠) ، (٢٢,٥ ، ٩)، (٢٧,٥ ، ٧) (٣٢,٥ ، ٢) ، (٣٧,٥ ، صفر) .

ويمكن تمثيل النقاط السابقة ـ وبالتوصيل بينها بخطوط مستقيمة نحصل على شكل المضلع التكرارى كمايلى :



الشكل رقم (١٢)

وبالنظر على الشكل رقم (١١) نجد أن هناك مثلثين متتاليين متقابلين متطابقين تماما(×) والموضحة أرقامهم (٢،١) (٤،٣) (٦،٥) (٧،٨) (٩،١٠) (١٢،١١) ، (١٤،١٣) بالشكل،الزوجيه منها وهى المثلثات المظللة خارجه عن نطاق مساحة المضلع التكرارى ، والفردية منها وهى غير المظللة خارج نطاق مساحة المدرج التكرارى ـ ونظراً لخاصة التطابق بين كل مثلثين متقابلين أحدهما فردى ، والآخر زوجى فاننا نلاحظ أن المساحة بين المضلع التكرارى والمحور الأفقى تساوى نفس المساحة الكلية للمستطيلات، وهى تساوى مجموع

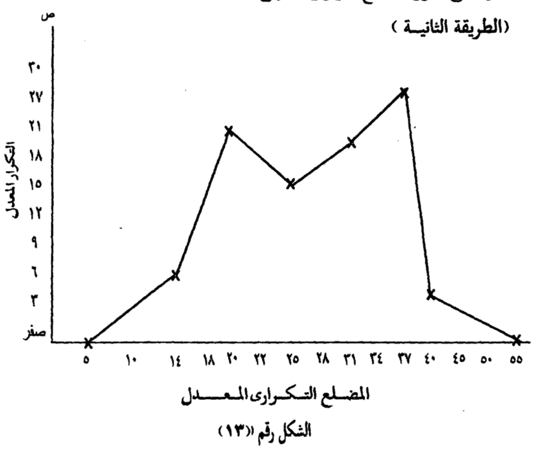
(×) (زاويتين وضلع) .

التكرارات ، أى يمكن أن نقول أن مساحة المضلع التكرارى تساوى مساحة المدرج التكرارى لأى ظاهرة يمكن تمثيلهما بيانياً وفقاً للشكلين المشار إليهما عاليه . .

مثـــال (١٢)

أما المثال رقم (١٠) السابق من جدول التوزيع التكرارى المعدل يمكن تمثيله فى صورة مضلع تكرارى كمايلى :

(الطريقـة الثانيـة)



المضـلع التـكـرارى المـعـــدل

الشكل رقم (١٣)

جـ ـ المنحـنى التـكرارى *Frequency Curve*

عبارة عن الخط الممهد باليد بين كل أو معظم نقاط المراكز العليا للمضلع التكرارى .

من التعريف السابق نجد أن المنحنى التكرارى لا يختلف عن المضلع التكرارى - الذى تم مناقشته فى البند (ب) السابق إلا فى أمر واحد فقط وهو أن عملية التوصل بين نقاط المراكز العليا للفئات التى تمت بخطوط مستقيمة بين كل مركزين متتاليين فى المضلع التكرارى ، يكون التوصيل باليد بين كل أو معظم نقاط المراكز العليا للفئات المختلفة . بما فيها الفئة السابقة للفئة الأولى والفئة اللاحقة للفئة الأخيرة ، وبذلك نحصل على المنحنى التكرارى ، وعادة ما تكون المساحة المحدودة تحت المنحنى التكرارى أقل أو مساوية تقريباً (×) للمساحة المحدودة لكل من المضلع أو المدرج التكرارى لنفس الظاهرة موضوع التمثيل البيانى .

مثـــال (١٣) :

فى المثال رقم (١١) السابق - مثل بياناته فى صورة منحنى تكرارى .

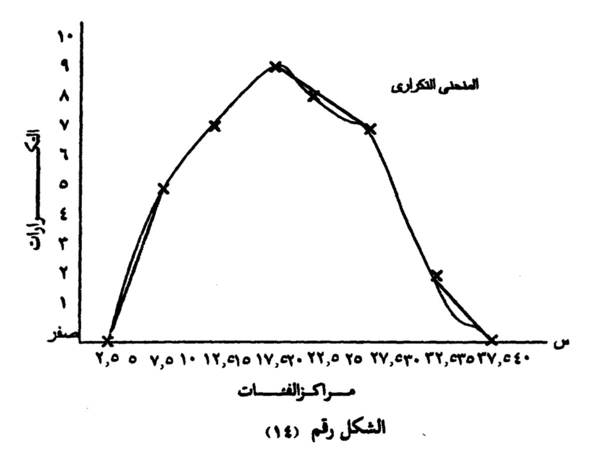
الحــــــل :

١ ـ باتباع نفس الخطوات التى تمت فى المثال (١١) حتى تحديد إحداثى نقاط (س ، ص) المختلفة .

٢ – بالتوصيل بخط ممهد (××) باليد بين كل أو معظم قيم (ص) المختلفة وهى (صفر ، ٥ ، ٧ ، ١٠ ، ٩ ، ٧ ، ٢ ، صفر) على الترتيب نحصل على المنحنى التكرارى لنفس الظاهرة .

(×) كلما كانت أطوال الفئات قصيرة كلما إقتربت مساحة المنحنى التكرارى من مساحة كل من المدرج والمضلع التكرارى لنفس الظاهرة وفى النهاية تتساوى المساحات كلما صغر طول الفئة .

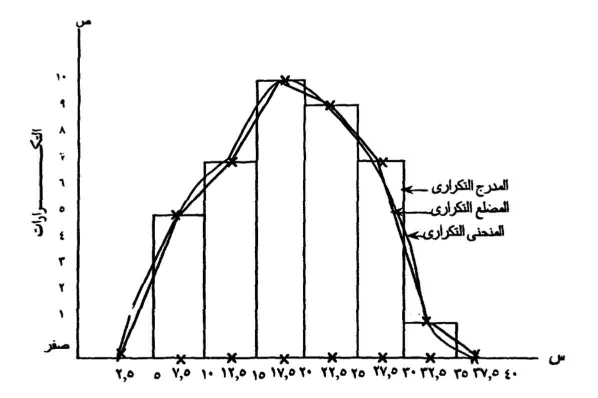
(××) خط أملس خال من الأنكسارات الفجائية .



الشكل رقم (١٤)

مثال (١٤) :

وعليه يمكن تجميع المثال رقم (٩) السابق فى الشكل رقم (١٥) التالى حيث يمثل كل من (١) المدرج التكرارى (٢) المضلع التكرارى (٣) المنحنى التكرارى وفقا لمايلى :



الفئـات ومراكز الفئـــات

الشكل رقم (١٥)

أنواع المنحنيات التكراريـة :

يتـوقف شكل المنحنى التكرارى على التوزيع التكرارى الذى يتم تمثيله بيانيا (×) كما يستخدم المنحنى التكرارى كشكل بيانى لعرض نموذجيـن أو أكثر من التوزيعات التكراريـة والتى تختلف فيما بينها على أساس خاصية أو أكثر من الخصائص الأربعة (×) فهنا ك :

١ ـ المنحنى التكرارى المعتدل أو المتماثل *Symetric or Normal Curve* :

(×) تتوقف على خصائص التوزيع الأربعة من حيث القيمة الوسطى ، والتشتت ، والالتواء ، والتفرطح .

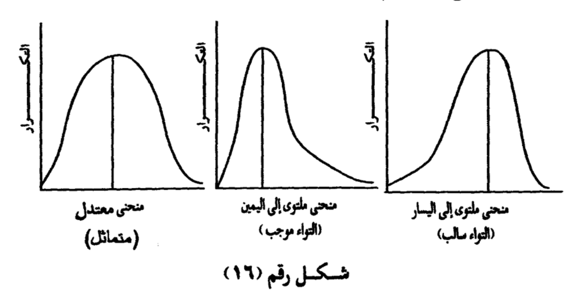
وهو منحنى متماثل وله محور رأسى متماثل يمر بنقطة النهاية العظمى للتوزيع ، ويقسم التوزيع إلى جزئين متطابقين تماماً .

٢ ـ المنحنى التكرارى غير المعتدل(غير متماثل أى ملتوى: Kewed-curve: ويختلف عن المنحنى المعتدل فى أن طرفيه غير متماثلين ، فقد يكون الطرف الأيمن ممتد إلى مسافة أطول من الطرف الأيسر ويطلق عليه (منحنى ملتوى إلى اليسار اى ذات التواء سالب) وقد يحدث العكس بأن يكون الطرف الأيسر أطول من الطرف الأيمن ، ويطلق عليه (منحنى ملتوى إلى اليمين أو ذات التواء موجب) .

ونلاحظ هنا أن :

ـ المنحنى الملتوى إلى اليسار يكون صعودة إلى القمة سريعاً وهبوطة منها بطيئاً ، والعكس فى المنحنى الملتوى إلى اليمين يكون صعوده إلى القمة بطيئا وهبوطة منها سريعاً .

ويتضح لنا ما تقدم من الأشكال البيانية التالية :



شكل رقم (١٦)

٣ ـ المنحـنى التـكرارى المتجمـع (Commulative Frequncy Curve):

سبق لنا فى الفصل الثالث أن تعرضنا للتوزيعات التكراريـة المتجمعـة سواء أكانت المتـجمعة الصاعدة أو المتجمعة الهابطة ، المطلقة أو النسبية (x) ويمكننا رسم منحنيات تمثل التوزيعات السابقة ، وذلك بتخصيص المحور الأفقى (س) فى الشكل البيانى لحدود الفئات سواء أكانت فئات صاعدة أو فئـات هابطة ، على أن يخـصص المحـور الرأسى (ص) للتكرارات المطلقـة أو النسـبيـة ، المتجمعة الصاعدة (أوالهابطة) ، على أن يتم توصيل النقاط الناتجه بخط ممهد باليد ، وبذلك نحصل على أى من المنحنيين المتجمعين ، المنحنى المتجمع الصاعد (من جدول تكرارى متجمع صاعد) أو المنحنى المتجمع الهابط (من جدول تكرارى متجمع هابط) أو المنحنين معاً .

ويلاحظ أن المنحنى المتجمع الصاعد فى صعود مستمر ، بينما المنحنى المتجمع الهابط فى نزول مستمر ، كما أنـه إذا رسمنا كلا من المنحنين الصاعد والهبـاط فى شكل واحد وبنفس مـقياس الرسم على المحـورين (س، ص) فإن نقطة تقابلهما يكون لها خاصة مفيده من الناحيه العمليـة حيث أن إحداثيها الرأسى يساوى نصف مجموع التكرارات جميعها ويطلق عليه « الوسيط » .

مثـــال (١٥) :

من الجـدول التكرارى المتـجمـع الصاعـد ، والمتـجمـع الهـابط (المطلق والنسبى)التالى مثل ذلك بيانياً فى صورة منحنى متجمع صاعد ثم منحنى متجمع هابط ، ثم المنحنيين معاً .

الحـل :

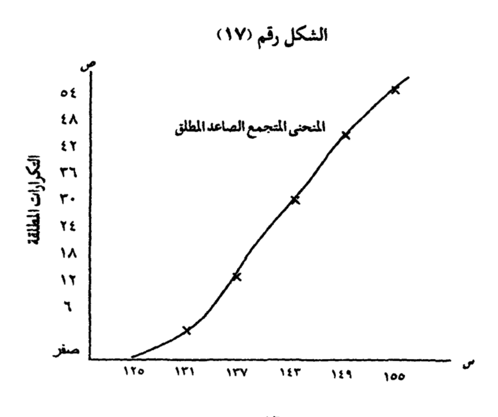
---

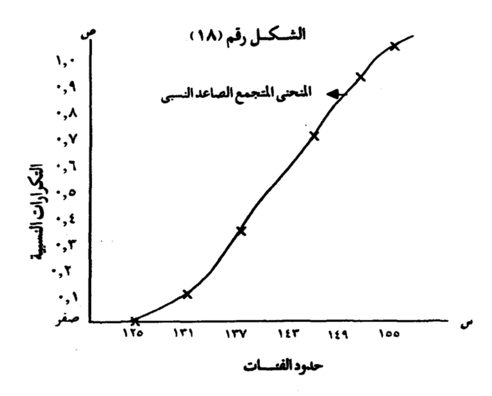
(١) إنظر الجداول رقم (١ ، ٢ ، ٣ ، ٤) صــ ٥١ ، ٥٢ ، ٥٣ .

أولاً : التكرار المتجمع الصاعد (المطلق والنسبى) كما فى الشكلين (١٧)، (١٨) التالية :

الفئات	التكرار المطلق البسيط	حدود الفئات	التكرار المتجمع الصاعد المطلق	التكرار النسبى البسيط	التكرار المتجمع الصاعد النسبى
١٢٥-	٦	أقل من ١٢٥	صفر	٠,١٢	صفر
١٣١-	١١	أقل من ١٣١	٦	٠,٢٢	٠,١٢
١٣٧-	١٥	أقل من ١٣٧	١٧	٠,٣٠	٠,٣٤
١٤٣-	١٢	أقل من ١٤٣	٣٢	٠,٢٤	٠,٦٤
١٤٩-١٥٥	٦	أقل من ١٤٩	٤٤	٠,١٢	٠,٨٨
		أقل من ١٥٥	٥٠		١,-
اجمالى التكرارات	٥٠			١,-	

الشكل رقم (١٧)

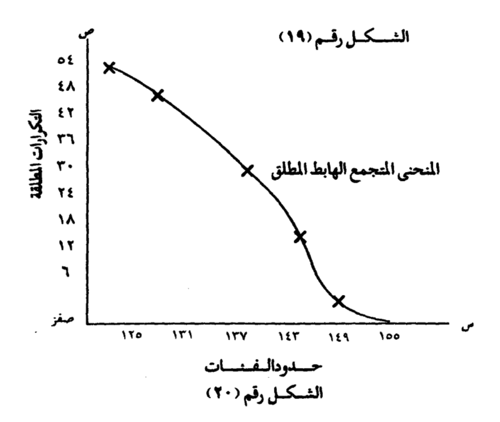




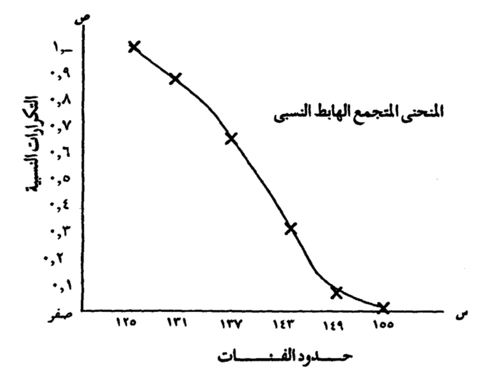
ثانياً : التكرار المتجمع الهابط (المطلق والنسبى) (كما فى الشكلين ١٩ ، ٢٠ التالية).

الفئات	التكرار المطلق البسيط	حدود الفئات	التكرار المتجمع الهابط المطلق	التكرار النسبى البسيط	التكرار المتجمع الهابط النسبى
١٢٥-	٦	١٢٥ فأكثر	٥٠	٠,١٢	١,-
١٣١-	١١	١٣١ فأكثر	٤٤	٠,٢٢	٠,٨٨
١٣٧-	١٥	١٣٧ فأكثر	٣٣	٠,٣٠	٠,٦٦
١٤٣-	١٢	١٤٣ فأكثر	١٨	٠,٢٤	٠,٣٦
١٤٩-١٥٥	٦	١٤٩ فأكثر	٦	٠,١٢	٠,١٢
		١٥٥ فأكثر	صفر		صفر
اجمالى التكرارات	٥٠			١,—	

الشكل رقم (١٩)

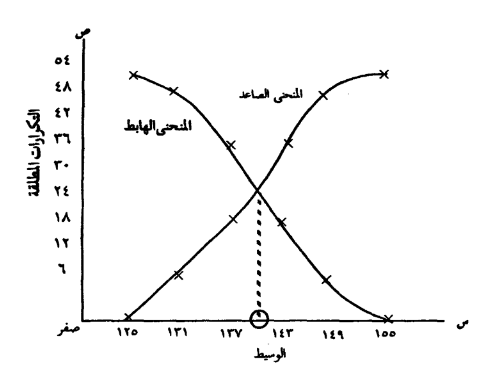


الشكل رقم (٢٠)



ثالثاً : التكراريـن معاً كما فى الشكل التالى :

الشكل رقم (٢١)



حـــدود الـفـئـــات

أسئلة وتمارين (١ ، ٢ ، ٣)

١ ـ عرف علم الاحصاء سواء الاحصاء الوصفي، الاحصاء الاستدلالي وما هي مجالات إستخدامه الاساسية ؟

٢ ـ أذكر بإختصار مراحل أو خطوات المنهاج الإحصائي .

٣ ـ تكلم عن :

(أ) مصادر جمع البيانات الاحصائية .

(ب) أساليب جمع البيانات الإحصائية .

(جـ) مزايا وعيوب أسلوب الحصر الشامل

(د) مزايا وعيوب أسلوب العينات .

(و) خطأ الصدفه وخطأ التحيز ، وعما يتوقف خطأ الصدفه ؟

(هـ) الإطـار .

٤ – من أهم أنواع العينات .

العينه العشائيه البسيطه ، العينه الطبقيه ، العينه متعدده المراحل ، العينه المنتظمه .

ناقش ما هية كل منها من حيث عمليه السحب وكيف تتم ، وظروف إستخدامها ومزاياها وعيوبها ؟

٥ ـ وضح القواعد أو الشروط العامه الواجب مراعاتها عند تصميم الإستمارة الإحصائية .

٦ ـ عرف كل من :

(أ) صحيفه الإستقصاء ، أو الإستبيان .

(ب) كشف البحث .

٧ ـ أذكر أهم أساليب جمع البيانات من الميدان .

٨ ـ ناقش باختصار أهم طرق تصنيف أو عرض البيانات الإحصائيه .

٩ ـ فرق بين المتغير المنفصل و المتغير المتصل .

١٠ ـ أذكر أنواع الجداول الإحصائيه مع ذكر أهم الأسس والقواعد الواجب مراعاتها عند إعداد هذه الجداول سواء لبيانات وصفيه أو لبيانات كمية .

١١ ـ اذكر خطوات التصنيف أو التبويب الآلى للبيانات الإحصائيه .

١٢ ـ فيما يلى بيان بالإنتاج من الذهب (بملايين الدولارات) فى احدى الدول المنتجة له عن المدة من ١٩٨٠ ـ ١٩٩٠ .

السنة	١٩٨٠	١٩٨١	١٩٨٢	١٩٨٣	١٩٨٤	١٩٨٥	١٩٨٦	١٩٨٧	١٩٨٨	١٩٨٩	١٩٩٠
إنتاج الذهب (بملايين الدولارات)	١٦٤	٢٦٠	١٨٠	٢٠٠	٣٠٠	٢٤٠	٥٠٠	٦٠٠	٧٠٠	٩٠٠	١٠٠٠

والمطلوب : تمثيل ذلك فى صورة أعمدة بسيطه .

١٣ ـ فيما يلى جدول يوضح ، اجمالى الاقساط ، واجمالى التعويضات باحدى شركات التأمين عن عامى ١٩٩٣/٩٢ ، ١٩٩٤/٩٣ (بالآلف جنيه) .

البيان	١٩٩٣/٩٢			١٩٩٤/٩٣		
	تأمينات حياة	تأمينات عامة	الجملة	تأمينات حياة	تأمينات عامة	الجملة
اجمالى الأقساط	هـ ٤٥٥٣	هـ ٣٠٥٧٤١	هـ ٣١٠٢٩٤	هـ ٥٧٠٧	هـ ٣٥٧٧٤٠	هـ ٣٦٣٤٤٧
اجمالى التعويضات	١٧٩٨	٢٠٢٩٤٤	٢٠٤٧٤٢	١٧٥٧	٢١٥٦٢٩	٢١٧٣٨٦

والمطلوب :

تمثيل ذلك بيانيا :

(أ) فى صورة أعمدة مزدوجة .

(ب) فى صورة أعمدة مجزأة

١٤ ـ الجدول التالى يوضح تطور عدد سكان مناطق العالم عن الأعوام ١٩٥٠، ١٩٦٠ ، ١٩٧٠ موزعة على القارات المختلفة (بالمليون نسمة) :

القارة	١٩٥٠	١٩٦٠	١٩٧٠
إفريقيا	٢١٧	٢٧٨	٣٤٤
آسيا	١٣٨٨	١٦٥٩	٢٠٥٦
أوروبا	٣٩٢	٤٢٥	٤٦٢
أمريكا الشماليه	١٦٦	١٩٩	٢٢٨
أمريكا الجنوبية	١٦٢	٢١٣	٢٨٣
إستراليا	١٣	١٦	١٩
روسيا	١٨٠	٢١٤	٢٤٣
الإجمالى	٢٥١٧	٣٠٠٥	٣٦٣٢

والمطلوب :

تمثيل ذلك بيانيا :

١ ـ فى صورة أعمدة بسيطة بالنسبه لاجمالى السنوات

٢ ـ فى صورة أعمدة بسيطة مزدوجة بالنسبة للتوزيع على القارات عام ١٩٧٠.

٣ ـ فى صورة أعمدة بسيطة مجزأة بالنسبة لأعوام ٥٠ ، ٦٠ ، ١٩٧٠ .

١٥ ـ فيما يلى جدول يوضح إجمالى الودائع فى البنوك عام ١٩٩١ كقيمة بالمليون جنيه .

القطاع	القطاع الحكومى	شركات القطاع العام	قطاع الاعمال الخاص	القطاع العائلى	العالم الخارجى	الاجمالى
الأرصدة فى نهاية يونيو	١٠١٧٣	٩٧٨٠	١١٨٠٥	٤٨٨٠٠	١٠٩٣	٨١٦٤٨

والمطلوب :

تمثيل ذلك بيانيا فى شكل دائرة .

١٦ ـ الجدول التالى يوضح أنصبة الدول الرئيسيه المستوردة للقطن المصرى فى عامى ٨٩/١٩٩٠ ، ٩٠ / ١٩٩١ .

الدولـة	الاتحاد السوفيتى	رومانيا	اليابان	بلغاريا	سويسرا	أخرى	الاجمالى
عام٨٩/ ١٩٩٠	٢٢,٢	١,١	٢٠	١,٤	٣,٢	٥٢,١	١٠٠
عام٩٠/١٩٩١	٣٠,٨	٢٦,٧	١٥,٩	٥	٣,٧	١٧,٩	١٠٠

المطلوب :

تمثيل ذلك بيانيا فى صورة الخط البيانى .

١٧ ـ فيما يلى جدول يوضح تقديرات ميزان المدفوعات عام ٩٠/١٩٩١ بالمليون دولار .

المعاملات الجارية												
المتحصلات						المدفوعات						
حصيلة الصادرات	الملاحه	رسم المرور في قناة السويس	السياحة	فوائد وأرباح	متحصلات أخرى	مدفوعات عن واردات	مدفوعات تجارية	الملاحة	مصروفات السفر والتعلم والعلاج	الفوائد على القروض	مصروفات الحكومة	مدفوعات أخرى
٣٨٨٦٫٨	٨١١٫٩	١٦٦١٫٩	٩٢٤٫١	١٠٤٩٫٤	٣٣٣١٫٥	١١٤٢٤٫٥	٣٣٦٫٢	١٠١٫٠	٨٢٫٩	١٥٢٩٫٧	٤٤٤٫٧	١٦٢١٫٥

والمطلوب :

تمثيل ذلك بيانيا فى شكل بيانى مناسب .

١٨ ـ أظهرت حسابات بنك لأربعة أعوام توزيع الأرباح كما يلى (بالمليون جنيه)

السنــه	١٩٩٠	١٩٩١	١٩٩٢	١٩٩٣
الربح قبل الضرائب	١٧٥	٢٠٠	٣٥٠	٤٠٠
الضرائب	٥	١٠	١٢	١٥
ارباح الاسهم	٢٥	٣٥	٤٠	٥٥
صافى الربح	١٤٥	١٥٥	٢٩٨	٣٣٠

والمطلوب :

تمثيل ذلك بأحدى طرق التمثيل البيانى المناسبه .

١٩ ـ الجدول التالى يوضح إستثمارات شركات التأمين المخصصه لحقوق حملة الوثائق موزعه على أنواع التأمين الرئيسيه فى عامى ١٩٩٣/١٩٩٤ ، ١٩٩٢/١٩٩٣ (بالألف جنيه) .

السنـة	حياة وتكوين أمـوال	تأمينات عامه	جمله إستثمارات مخصصة	إستثمارات حرة	الإجمـالى
٩٤/٩٣	١٩٨٢٦٩٠	٣٤١٠٢٧١	٥٣٩٢٩٦١	٩٧٩٧٩٩	٦٣٧٢٧٦٠
٩٣/٩٢	١٥٨٢٥٦٦	٢٩٨٨٩٦١	٤٥٧١٥٢٧	٨٣٤٢١٧	٥٤٠٥٧٤٤

المطلوب :

(أ) تمثيل ذلك بيانيا فى صورة أعمدة .

(ب) تمثيل ذلك بيانيا فى صورة دائرة .

٢٠ ـ المفردات التالية تمثل درجات (٤٠ عاملا) فى إختبار الذكاء .

٩٦ ١١٠ ١٠٧ ٩٢ ١٢٨ ٩٩ ١٠٠ ١١٩
١١٦ ١٠٤ ٨٩ ١١٥ ١١٢ ١٠٨ ١٢٢ ١٠٥
٩٠ ١٠٨ ١٢٥ ١٠٣ ١٣٥ ٨٤ ٩٦ ١١١
١٠٦ ٩٧ ٧٧ ١٠٠ ١١٥ ١٠١ ١٢٠ ١٠٥
٨١ ٩٤ ١١٧ ٩٨ ١٣٧ ٧٢ ١٠٨ ٩٦

المطلوب :

وضع المفردات السابقة على شكل توزيع تكرارى عدد فئاته (٧ فئات متساويه) على أن تبدأ الفئه الأولى بـ (٧٠) .

٢١ ـ الجدول الآتى يوضح توزيع الأجور الأسبوعية بإحدى الورش بالدولار :

فئات الأجر	١٨-	٢٠-	٢٤-	٢٦-	٢٨-	٣٠_٣٢
عدد العمال	٢٠	٢٥	٣٠	١٥	١٠	٥

المطلوب :

أولا : تمثيل التوزيع السابق فى صورة

(أ) مدرج تكرارى (ب) مضلع تكرارى (جـ) منحنى تكرارى

(د) المنحنى التكرارى المتجمع الصاعد

(هـ) المنحنى التكرارى المتجمع الهابط .

ثانيا : إحسب التوزيع التكرارى النسبى لبيانات السؤال السابق ومنه أوجد التوزيع المتجمع الهابط ، والمتجمع الصاعد النسبى

٢٢ ـ الجدول التالى يبين التوزيع التكرارى لعدد (٣٠٠) من العمال باحدى المؤسسات موزعه على حسب أعمارهم :

فئات العمر	١٥ ـ	٢٠ ـ	٣٠ ـ	٣٥ ـ	٥٠ ـ	٧٠ ـ ٨٠	الاجمالى
عدد العمال	٣٠	٥٠	٥٥	٤٥	٨٠	٤٠	٣٠٠

التمثيل البيانى للتوزيع التكرارى السابق فى صورة

(أ) مدرج تكرارى (ب) مضلع تكرارى

(جـ) منحنى تكرارى (د) منحنى متجمع صاعد

(هـ) منحنى متجمع هابط

(و) حدد عدد العمال الذين تقل أعمارهم عن ٣٠ سنة

(ز) حدد عدد العمال الذين تزيد أعمارهم عن ٣٥ سنة .

٢٣ ـ إذا كانت البيانات التاليه توضح أطوال وأوزان (٤٠ شخصا) كما يلى.

الوزن	الطول	الوزن	الطول	الوزن	الطول	الوزن	الطول
٦٦	١٤٥	٦٧	١٥٩	٧٩	١٦٩	٧٩	١٦٩
٨٦	١٧٤	٩٥	١٧٦	٥٣	١٤٢	٨٨	١٦٧
٧٨	١٧٥	٧٦	١٧٨	٧٢	١٦٣	٧٨	١٥٧
٥٧	١٤٨	٥٤	١٤٨	٨٧	١٧٥	٩٢	١٧٢
٨٦	١٦٨	٨٣	١٦٤	٥٩	١٣٩	٦٢	١٤٧
٧٦	١٥٦	٧٣	١٦٥	٧٥	١٦٧	٩٣	١٦٧
٦٢	١٥٢	٦٥	١٥٧	٦١	١٣٧	٧٣	١٤٦
٧٦	١٤٨	٨٥	١٥٦	٧١	١٦٢	٨٩	١٧٨
٧٩	١٦٨	٧٦	١٥٣	٧٩	١٥٩	٧٦	١٥٦
٦٩	١٦٥	٥٥	١٥٢	٦٨	١٥٧	٧٤	١٦٦

المطـلـوب :

عمل توزيع تكرارى مزدوج للوزن والطـول معاً ثم من التوزيع التكـرارى

(أ) عمل توزيع تكرارى مستقل لكل من الوزن والطول.

٢٤ ـ فيما يلى بيان بأسعار مجموعه محددة من الاسهم (بالجنيه) فى بورصه الاسكندرية .

١١٧	٨٧	٣١٦	١٩٥	٢٢٤	٨٣
٩٧	٢١١	١٢٩	٩٨	٣٠٤	١٣٣
١٥٤	٢٧٥	٣٠٤	١٦٢	١٦٥	١١٦
٢٨٢	١٦٢	١٢٨	١٦٢	١٢١	١٤٠
١١٩	١٨٩	٨٥	١٢٣	١٤٨	٨٦
١٣٤	٩٦	١٤٧	٢٥٣	١٣٧	١٠١
١٤٦	٢٥٤	١٢٢	٩٣	٢٠٣	٧٦

المطلوب :

تبويب الارقام السابقة فى جدول تكرارى منتظم طول فئته ٢٠ جنيها .

٢٦ ـ الجدول التالى يوضح التوزيع التكرارى لمرضى التأمين الصحى بأحد المستشفيات موزعين على حسب العمر والنوع .

العمر	أناث	ذكور	المجموع
أقل من ٢٠	٦	٩	١٥
٢٠ ـ	٥٥	١٥٠	٢٠٥
٣٠ ـ	٤٠	٢٠٠	٢٤٠
٤٠ ـ	٣٠	٢٨٠	٣١٠
٥٠ ـ	٢٠	٣٢٠	٣٤٠
٦٠ ـ	١٠	١٨٠	١٩٠
٧٠ فأكثر	٥	٢٥	٣٠
المجموع	١٦٦	١١٦٤	١٣٣٠

المطلوب :

١ ـ رسم المدرج التكرارى لتوزيع كل نوع من انواع المرضى .

٢ – رسم المضلع التكرارى لمجموع المرضى.

٢٧ ـ اذا كان لدينا عينه مكونه من ٢٥ مفردة لدراسة العلاقة بين عمر الزوجه وعمر الزوج وكانت بياناتها كالتالى :

رقم الاسرة	عمر الزوجة (س)	عمر الزوج (ص)	رقم الاسرة	عمر الزوجة (س)	عمر الزوج (ص)	رقم الاسرة	عمر الزوجة (س)	عمر الزوج (ص)
١	٢٧	٣١	١٠	٣٣	٤٨	١٩	٢٣	٣٢
٢	٢٢	٤٢	١١	١٦	٣٨	٢٠	١٦	٤٣
٣	٢٩	٤٣	١٢	٢١	٤٥	٢١	١٧	٤٩
٤	١٧	٢٤	١٣	٢٢	٤٠	٢٢	٣٥	٤٨
٥	١٨	٣٣	١٤	١٧	٤٩	٢٣	١٦	٤٢
٦	٢٣	٣٨	١٥	٢٨	٣٥	٢٤	٢٣	٣١
٧	١٨	٤٩	١٦	٢٤	٢٤	٢٥	٣٩	٤٣
٨	٢٢	٢٣	١٧	٢٢	٣٦	-		
٩	٢٠	٢٧	١٨	٢٧	٣٨	-		

المطـلـوب :

اعداد التوزيع التكرارى المزدوج لعمرى الزوجة والزوج وكل التوزيعات الهامشيه الأخرى الممكنـة .

الفصل الرابع

المرحله الرابعه : تحليل البيانات الإحصائيه

مقاييس النزعة المركزية (المتوسطات الاحصائية)

Measures Of centeral Tendency

Or Statistical Averages

تعريف عام : فى الفصول السابقة تم وصف وتلخيص البيانات الإحصائية الخام عن الظاهرة موضوع الدراسة ، إما فى شكل جداول إحصائية أو فى بعض الأشكال البيانية أو الهندسية ، ومما لا شك فيه أن الخطوتين السابقتين قد ساعدت إلى حد كبير على فهم وإبراز بعض خواص مثل هذه الظواهر ، ورغم ذلك لم يكن من الميسور فى بعض الحالات إجراء بعض المقارنات الدقيقة بين الظواهر المتشابهة فى فترات أو أماكن مختلفة كما إستحال ذلك فى البعض الآخر من الأشكال البيانية .

من هنا كان لابد من إستكمال الخطوتين السابقتين بخطوة ثالثة ضرورية تسهل وتيسر لنا إجراء عمليات المقارنات المشار إليها بين الظواهر من ناحية ، وتزيد من إبراز خصائص بيانات هذه الظواهر من ناحية أخرى ، وتقوم الخطوة الثالثة على تلخيص بيانات الظواهر أو المتغيرات موضوع الدراسة فى صورة رقم واحد بإستخدام بعض المقاييس الإحصائية المختلفة .

وتعتبر مقاييس النزعة المركزية أو المتوسطات من أهم المقاييس الإحصائية الرقمية التى سنتناولها بالدراسة فى الأجزاء التالية :

فالمتوسط لأى مجموعة من البيانات الإحصائية هو القيمة التى تعبر عن المجموعة بصفة عامة أو النموذج الذى يمثل مجموعة القيم أو مفردات الظاهرة أو المعيار الذى تقاس بالنسبة اليه مفردات هذه المجموعة وتقارن بواسطته المجموعة كلها بالنسبة إلى المجموعات الاحصائية الأخرى. وكما أن هذه القيمة أو هذا النموذج تنحرف عنه القيم أو المفردات الأخرى بشئ من الإنتظام .

وعن طريق المتوسطات تتم مقارنة المجموعات المتشابهة بعضها ببعض بدقة وسهولة ويسر ، كما أنه بالحصول على المتوسطات يمكننا الأستغناء عن

استقراء مفردات الظاهرة كلها بصفة عامة ، أو بصفة خاصة فى حالة المجتمعات الإحصائية الكبيرة أو فى المجتمعات التى يصعب أو يستحيل فيها ذلك.

فالطبيب الذى يفحص المرضى بغرض قياس ضغط الدم لديهم مثلاً ، ولاجراء ذلك يقوم بإختيار مجموعة من الاشخاص يقيس ضغط الدم لكل فرد فى هذه المجموعة المختارة، فيجد أن هذا الضغط مختلفاً من شخص لآخر وذلك راجع لإختلاف ظروفهم عن بعضهم البعض من حيث العمر ، والحالة الصحية والاجتماعية والعصبية أو طريقة التغذية ، واختلاف العادات بينهم من حيث التدخين ، ومزاولة الرياضة .... الخ ، ومما لاشك فيه أن هذا الطبيب يحتاج إلى نموذج أو قيمة مثلى لهذه الجماعة من حيث قياس ضغط الدم لمقارنتهم بغيرهم من ناحية ، وببعضهم البعض من ناحية أخرى ، وحيث أن بعض الأشخاص ضغطهم منخفض والآخر مرتفع والبعض يقع بينهم ، فلن يكون النموذج أو القيمة المثلى هى القيمة المنخفضة أو القيمة المرتفعة ، ولكن ستكون قيمة متوسطة بينهما، أو القيمة التى يتركز حولها معظم الحالات المقيسة، حيث تميل القيم الى التجمع نحو قيمة معينة يطلق عليها بمتوسط القيم أو بمتوسط ضغط الدم التى على أساسها يقارن كل حالة تعرض عليه عند قياس ضغط الدم ، وبناء عليه سيحكم على هذه الحالة هل هى مرتفعة أو منخفضة عن الحالة المتوسطة أو تساويها أو قريبة منها ، وبناء على ذلك يقال أن ذلك الشخص ضغط دمه مرتفع ويقال للاخر أن ضغط دمه منخفض، ويقال للثالث أن ضغط دمه عادى أى مساوى للحالة المتوسطة ، وهكذا ، فالرقم النموذجى هنا هو الرقم الذى يلخص مجموعة القيم فى رقم واحد يمثلها ويعبر عن خصائص التوزيع لهذه الظاهرة ، والقيمة المثلى أو النموذج المتوسط تقترب منه معظم مفردات الظاهرة الاحصائية المقاسة أو تتركز حولها معظم مفردات الظاهرة، أى يزداد عدد القيم كلما قربت من المتوسط ويقل عددها كلما بعدت عنه ، ويطلق على خاصية

تجمع القيم حول قيمة معينـة أو النموذج أو المتوسط ، خاصية النزعة المركزيـة، كما يطلق على المقاييس المستخدمـة لقياس هذه النزعات بالمتوسطات، وأهم مقاييس النزعـة المركزيـة أو المتوسطات الإحصائيـة هى :

(١) الوسط الحسابى (٢) الوسيط

(٣) المنـوال (٤) الوسط الهندسى .

(٥) الوسـط التوافقى

ولكل من مقاييس المتوسطات السابقة خصائصـه ومزاياه وعيوبـه ، ويعتمد إختيار أى من هذه المتوسطات ، كمقياس كمى ملائم يمثل مجموعة بيانات الظاهرة ، على شكل التوزيع ـ معتدلاً أو ملتوياً من ناحيـة ـ ومدى توافر خاصية معينـة فى المجموعة ـ نوعيـة أو ترتيبيـة أو فئوية من ناحيـة أخرى ، هذا بجانب توافر نواحى منطقيـة ورياضيـة وعمليـة من ناحيـة ثالثـة، وسنورد ذلك تفصيلاً عند دراسة كل متوسط منها .

وإن كانت الفكرة التى يقوم عليـها موضوع المتوسطات واحدة ، وهى تمثيل التوزيع التكرارى بقيمة واحدة يبرره ميل المجموعات الكبيرة من الوحدات نحو التركز حول قيمة معينـة تنحرف عنها القيم الأخرى بشئ من الانتظام هذه القيمة هى ما نطلق عليه بالمتوسطات وإن كانت تتخذ أسماء مختلفة .

ولحساب مقاييس المتوسطات التى تعبر عن مختلف البيانات ، وتساعد على المقارنة بين نزعتـها نحو مراكز معينة سنتعرض فيما يلى بشئ من التفصيل إلى أهم هذه المقاييس.

المبحث الأول

الوسط الحسابى

Arithmatic ***Mean***

١ ـــ مقدمة وتعاريف :

إن الوسط الحسابى عبارة عن نقطة الأتزان لأى توزيع لظاهرة ما سواء أكانت هذه الظاهرة يمثلها قيما مفردة ، أو كانت لتوزيعاً معتدلاً ، أو ملتوياً ، وعندها نجد أن مجموع الفروق بين قيمة هذه النقطة (الوسط الحسابى) والقيم الأصغر منها من ناحية تساوى مجموع الفروق عن نفس القيمة والقيم الأكبر منها من ناحية ثانية، أى أن مجموع محصله الفروق عنه يساوى (الصفر) ، وعليه فإن الوسط الحسابى للقيم المختلفة التى يأخذها متغير ما، هو القيمة الممثلة لجميع القيم التى حسب لها ، وبمعنى آخر هو القيمة التى لو ضربت فى عدد مفردات الظاهرة موضوع القياس لكان الناتج مجموع قيم مفردات هذه الظاهرة .

٢ ـ الوسط الحسابى لبيانات غير مبوبة :

نفرض أن لدينا متغير (س) تأخذ مفرداته القيم $س_1$ ، $س_2$ ، $س_3$ ، ... ، $س_ن$ ، أى أن عدد مفردات قيم المتغير (ن) ، فإن الوسط الحسابى لمجموعة مفردات هذه القيم ، هو عبارة عن مجموع مفردات هذه القيم مقسوماً على عدد مفرداتها .

ولا يختلف المفهوم السابق للوسط الحسابى سواء كنا نقيس الوسط الحسابى لمجتمع إحصائى أو لعينة إحصائية ، والاختلاف بينهما يتركز فى رمز الوسط الحسابى لهما حيث نرمز للوسط الحسابى للمجتمع الإحصائى بالرمز (μ) ونرمز للوسط الحسابى للعينة الإحصائية بالرمز ($\bar{س}$) ، كما أننا سنرمز لكلمة « مجموع » بالرمز « مجـ » كما تختلف صيغه القانون بإختلاف نوع المتغيرات، فردية أم تكرارية أى غير مبوبة أم مبوبة.

أولاً : الوسط الحسابي لبيانات غير مبوبة (مفردة)

(أ) الطريقة المباشرة : أ ى باستخدام المفردات الخام الأصلية وفيها:

$$\bar{س} = \frac{س_1 + س_2 + س_3 + ... + س_ن}{ن} = \frac{مجـ س}{ن} ...(١/أ)$$

مثـــال (١) : أوجد الوسط الحسابي لدرجات عينه مكونه من (١٠) طلاب في مادة الرياضيات إذا كانت درجاتهم في هذه المادة كمايلي:

٢٥ ، ٦٠ ، ٨٥ ، ٩٠ ، ٥٥ ، ٤٥ ، ٥٥ ، ٧٥ ، ١٠ ، ١٠٠ .

الحـــــل :

$$\bar{س} = \frac{مجـ س}{ن}$$

وحيث مجـ س = ٢٥ + ٦٠ + ٨٥ + ٩٠ + ٥٥ + ٤٥ + ٥٥ + ٧٥ + ١٠ + ١٠٠ = ٦٠٠

، ن = ١٠

∴ $\bar{س}$ (الوسط الحسابي لدرجة النجاح في مادة الرياضيات)

$$= \frac{٦٠٠}{١٠} = ٦٠ \text{ درجه}$$

(ب) طريقة الوسط الفرضي (أو الإنحرافات البسيطه) وفيها يتم :

١ ـ إختيار وسط فرض وسنرمز له بالرمز (أ) (*)

٢ ـ قياس إنحرافات القيم الأصلية للظاهرة أو المتغير عن الوسط الفرضي المختار (أ) وسنرمز له هنا بالرمز (ح) .

أى أن (ح) = (س ـ أ)

٣ ـ ثم نحصل على مجموع صافي (**) الانحرافات أى (مجـ ح)

٤ ـ وعليه نحصل على الوسط الحسابي ($\bar{س}$) باستخدام صيغه القانون التالية :

(*) يراعى في الإختيار أن يكون (أ) فيه تتوسط تقريباً مجموعة القيم ، لنقلل من العمليات الحسابية ، وليس شرطا أن تكون إحدى المفردات المباشرة للمتغير .

(**) سيكون هناك بعض الانحرافات الموجبة للقيم (س > أ) وبعض الانحرافات السالبة للقيم (س < أ)

$\bar{س} = أ + \frac{مجـ ح}{ن}$ .... (١/ب)

مثـــال (٢) حل المثال السابق باستخدام طريقة الوسط الفرضى .

١ ـ نختار وسط فرضى ولتكن القيمة (٥٠)

٢ ـ حساب انحرافات القيم عن الوسط الفرضى (أ) وبالتالى حساب مجـ ح كالتالى .

$ح_١$ ، $ح_٢$ ، $ح_٣$ ، $ح_٤$ ، $ح_٥$

(٢٥-٥٠)، (٦٠ - ٥٠)، (٨٥ ـ ٥٠)، (٩٠ ـ ٥٠)، (٥٥ ـ ٥٠)

مجـ ح = ـ ٢٥ + ١٠ + ٣٥ + ٤٠ + ٥

، $ح_٦$ ، $ح_٧$ ، $ح_٨$ ، $ح_٩$ ، $ح_{١٠}$

(٤٥-٥٠)، (٥٥ - ٥٠)، (٧٥ ـ ٥٠)، (١٠ ـ ٥٠)، (١٠٠ ـ ٥٠)

= ـ ٥ + ٥ + ٢٥ ـ ٤٠ + ٥٠

مجـ ح = + ١٧٠ ـ ٧٠ = + ١٠٠

$\therefore \bar{س} = ٥٠ + \frac{١٠٠}{١٠}$

= ٥٠ + ١٠ = ٦٠ (نفس النتيجه بالطريقة المباشرة)

(ج) طريقة الانحرافات المختصرة : (لاتستخدم إلا اذا كانت كافة الانحرافات تقبل القسمة على رقم ثابت وليكن (ل) ويكون ناتج خارج قسمة الانحراف المختصر $ح' = \frac{ح}{ل}$ = مقدار صحيح (وليس كسرى حتى لا تتعقد العمليات الحسابية) وتستخدم صيغة القانون التالية فى هذه الحالة :

$\bar{س} = أ + (\frac{مجـ ح'}{ن} \times ل)$ .. (١/حـ)

مثـــال (٣) حل المثال رقم (١) السابق باستخدام الطريقة المختصرة :

الحـــل :

١ ـ نختار وسط فرضى (أ) وليكن (٥٠) كما فى المثال رقم (٢) .

٢ ـ نحسب انحرافات القيم عن الوسط الفرضى ح= (س ـ أ) كما فى المثال رقم (٢) .

٣ ـ نقسم الأنحرافات ح على قيمة ثابتـه (ل) ولتكن (٥) .

$ح'_١$ ، $ح'_٢$ ، $ح'_٣$ ، $ح'_٤$ ، $ح'_٥$

∴ مجـ ح' = $(\frac{-٢٥}{٥})$ ، $(\frac{١٠}{٥})$ ، $(\frac{٣٥}{٥})$ ، $(\frac{٤٠}{٥})$ ، $(\frac{٥}{٥})$

٥ـ + ٢ + ٧ + ٨ + ١ +

$ح'_٦$ ، $ح'_٧$ ، $ح'_٨$ ، $ح'_٩$ ، $ح'_{١٠}$

$(\frac{-٥}{٥})$ ، $(\frac{+٥}{٥})$ ، $(\frac{+٢٥}{٥})$ ، $(\frac{-٤٠}{٥})$ ، $(\frac{+٥٠}{٥})$

١ـ ١+ ٥+ ٨ـ ١٠+

= + ٣٤ ـ ١٤

= + ٢٠

∴ $\bar{س}$ = ٥٠ + $(\frac{٢٠}{١٠} \times ٥)$

= ٥٠ + $\frac{١٠٠}{١٠}$

= ٥٠ + ١٠

= ٦٠ (نفس النتيجـة بالطريقتين السابقتين) .

(ب) الوسط الحسابي الموزون (المرجح) *Weighted Arithmatic Mean*

فى أحيان كثيرة يتطلب الأمر حساب الوسط الحسابى لمجموعة من القيم ذات الأهميات النسبية الثابته ، وهنا لا يختلف الأمر عما جاء بالمثال رقم (١) السابق :

لكن فى بعض الأحيان يتطلب الأمر تقدير الوسط الحسابى لقيم ذات أهميات نسبية مختلفة ، وتظهر الأهمية النسبية كعامل مرجح لكل قيمة من مجموعة القيم للظاهرة موضوع الدراسة ، وبالتالى فالوسط الحسابى الدقيق لمثل هذه الظاهرة يطلق عليه الوسط الحسابى الموزون أو الوسط الحسابى المرجح ، وهو يختلف عن سابقه من حيث قيمته حيث يميل الوسط المرجح إلى القيمة الأكثر وزناً فإذا رمزنا لوزن (أو لأهمية القيم) بالرمز (و)

فالصيغة الرياضية للوسط الحسابى الموزون (المرجح) .

$$\bar{س} = \frac{س_1 \times و_1 + س_2 \times و_2 + س_3 \times و_3 + \ldots + س_ن \times و_ن}{و_1 + و_2 + و_3 + \ldots + و_ن}$$

أى هنا يتم ضرب كل (قيمة × الوزن المناظر لها) بقسمة مجموع القيم الناتجه على مجموع الأوزان المستخدمة، نحصل على الوسط الحسابى المرجح أى أن .

$$\bar{س} = \frac{مجـ\ س \times و}{مجـ\ و} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (٢)$$

فمثلاً لو طلب تقدير الوسط الحسابى لأجر العامل فى شركة بها مجموعة من الأقسام التنظيمية كقسم الانتاج ، وقسم البيع وقسم الحسابات ، وقسم الصيانة ، وقسم المركبات .... الخ ، واختلف متوسط الأجر من قسم لآخر من ناحية، كما إختلف عدد العاملين بكل قسم عن الأخر من ناحية أخرى، فالوسط الحسابى الحقيقى، لن يكون الوسط الحسابى لمجموع متوسطات الأجور على مجموع هذه الأقسام ، لكن الوسط الحسابى الحقيقى يكون الوسط الحسابى المرجح فاذا رمزنا للوسط الحسابى لأجر العامل بالأقسام التنظيمية الموضحة عالية بالرموز

$\bar{س}_1$، $\bar{س}_2$، $\bar{س}_3$، $\bar{س}_4$، $\bar{س}_5$ على الترتيب، وبعدد العمال بكل قسم بالرموز $و_1$، $و_2$، $و_3$، $و_4$، $و_5$ على الترتيب أيضاً فأن :

الوسط الحسابى لأجر العامل بالشركة (الوسط الحسابى المرجح)

$$\bar{\bar{س}} = \frac{\bar{س}_1 \times و_1 + \bar{س}_2 \times و_2 + \bar{س}_3 \times و_3 + ... + \bar{س}_ن \times و_ن}{و_1 + و_2 + و_3 + ... + و_ن}$$

وأيضاً إذا كانت هناك شركة لبيع مجموعة متعددة من أصناف البضائع، بحيث يختلف الوسط الحسابى لسعر كل صنف من ناحية ، كما تختلف كمية البضائع المباعة من كل صنف خلال سنة ما من ناحية أخرى، هنا يكون أيضاً الوسط الحسابى الدقيق لسعر بيع الوحدة بالشركة ككل هو الوسط الحسابى المرجح(الموزون) .

ومن الإستخدامات الملموسة والعملية للوسط الحسابى المرجح، كأساس سليم لاستخراج معدل الطالب الجامعى فى الكليات التى تتبع نظام الساعات المعتمدة (Credit - hours System) للفصل الدراسى الواحد أو لعده فصول دراسية أى معدلة التراكمى ، فالمعدل فى كل فصل دراسى يتكون من تقدير الدرجه الحاصل عليها الطالب فى كل مادة مقررة بالفصل الدراسى مقرونة بعدد ساعات تدريس نفس المادة فى الأسبوع ـ أى درجه التقدير الموزونه بعدد الساعات المقررة فى الأسبوع لكل من المقررات التى درسها الطالب فى فصل دراسى، مقسومة على مجموع الساعات المقررة أسبوعياً لتلك المقررات .

أما المعدل التراكمى عن عدة فصول دراسية فهو خارج قسمة مجموع نقاط التقديرات النهائية الموزونه على أساس مجموع عدد الساعات المقررة أسبوعياً لكل من المقررات التى درسها الطالب منذ التحاقه بالجامعة حتى تاريخ إحتساب هذا المعدل على مجموع الساعات المقررة أسبوعياً لتلك المقرارات لنفس التاريخ .

مثــال (٥) : فيما يلى أعمدة أحد الطلاب فى أحد الفصول الدراسية

عمود (١) اسم المقرر بالرموز	عمود (٢) عدد ساعاته التدريسية اسبوعيا	عمود (٣) تقدير الطالب فى المادة	عمود (٤) قيمة التقدير (س)	عمود (٥) عبارة عن (٤×٢) النقاط (موزونه)
١٠١ حسب [1]	٢	ب +	٤,٥	٤,٥ ×٢ = ٩
١٠١ كمى [2]	٣	جـ	٣,ـ	٣ × ٣ = ٩
٢٠١ فيز [3]	٤	أ	٥,ـ	٥ × ٤ = ٢٠
٢١١ كمى	٣	د +	٢,٥	٢,٥ × ٣ = ٧,٥
١٠٢ كمى	٣	هـ	١,ـ	١,ـ × ٣ = ٣
١٣١ كمى	٣	جـ +	٣,٥	٣,٥ × ٣ = ١٠,٥
المجموع	١٨			٥٩

أوجد المعدل الفصلى لهذا الطالب

الحــــل :

$$\text{المعدل الفصلى} = \frac{\text{مجـ س و}}{\text{مجـ و}} \qquad \frac{\text{مجموع العمود (٥)}}{\text{مجموع العمود (٢)}}$$

الوسط الحسابى المرجح

$$\bar{س} = \frac{٥٩}{١٨} = ٣,٢٨$$

---

(١) حسب تعنى محاسبة .

(٢) كمى : قسم الأساليب الكمية .

مثـــال (٦) :

فيما يلى بيانات أحد الطلاب فى عدة فصول دراسيـة فى أحد الجامعات التى تتبع نظام الساعات المعتمدة .

الفصل الدراسى	عمـود (١) اسم المقرر بالرموز	عمـود (٢) عدد ساعاته التدريسية اسبوعيا	عمـود (٣) التقدير	عمـود (٤) درجة التقدير	عمـود (٥) عبارة عن (٢×٤) النقاط (موزونه)
الفصل الدراسى الأول					
	١٠٤ سلم [١]	٢	ب +	٤,٥	٤,٥ × ٢ = ٩
	٣٢٤ كيم [٢]	٣	جـ	٣,ـ	٣ × ٣ = ٩
	٢٣٥ كمى	٣	أ	٥,ـ	٥ × ٣ = ١٥
	٣١٢ فيز	٤	ب	٤,ـ	٤ × ٤ = ١٦
الفصل الدراسى الثانى					
	١٠٥ سلم	٢	أ	٥,ـ	٥ × ٢ = ١٠
	٣٢٧ كيم	٣	ب	٤,ـ	٤ × ٣ = ١٢
	٣١٤ طبع [٣]	٤	جـ	٣,ـ	٣ × ٤ = ١٢
	٣٢٦ فيز	٣	ب	٤,ـ	٤ × ٣ = ١٢
	المجموع العام	٢٤			٩٥

أوجد المعدل التراكمى لهذا الطالب :

(٣) فيزا : فزيـاء .

---

(١) سلم : مـواد إسلامية .

(٢) كيم : كمياء .

الحـــل :

$$\text{المعدل التراكمى (الوسط الحسابى المرجح)} = \frac{\text{مجـ س × و}}{\text{مجـ و}} = \frac{\text{مجموع العمود (٥)}}{\text{مجموع العمود (٢)}}$$

$$= \frac{٩٥}{٢٤} = ٣,٩٦$$

مثـــال (٤) : محل لبيع الشنط الجلدية به ثلاث أحجـام من الشنط ، ويختلف سعر الوحدة ـ الشنطة – الواحدة على حسب الحجم ، كما إختلفت كميات المبيعات عام ١٩٩٦ من كل حجم منها وفقاً للبيانات التاليـة :

البيـــــان	الحجم الأولى	الحجم الثانى	الحجم الثالث
سعر الوحدة بالجنية	١٧٠	١٩٠	٢٢٠
عدد الحقائب المباعة	٥٠ ألف	٣٠ ألف	٢٠ ألف

المطلوب : متوسط سعر الشنطة الواحدة بالمحل المذكور .

الحـــــل :

حيث أن السعر (س) يختلف من حجم الآخر ، وكمية المبيعات (و) تختلف من حجم لآخر أيضاً.

∴ المتوسط المناسب هنا هو الوسط الحسابى الموزون (المرجح) حيث سيرجح سعر كل حجم بكمية المبيعات من نفس الحجم كمايلى :

$$\bar{س} = \frac{س_1 \times و_1 + س_2 \times و_2 + س_3 \times و_3}{و_1 + و_2 + و_3}$$

$$\bar{س} = \frac{١٧٠ \times ٥٠,٠٠٠ + ١٩٠ \times ٣٠,٠٠٠ + ٢٢٠ \times ٢٠,٠٠٠}{٥٠,٠٠٠ + ٣٠,٠٠٠ + ٢٠,٠٠٠}$$

$$\frac{١٨,٦٠٠,٠٠٠}{١٠٠,٠٠٠} =$$

= ١٨٦ جنيه

ثانياً : الوسط الحسابى لبيانات مبوبة (فى صورة توزيع تكرارى) :

نلاحظ عند ما تم تلخيص البيانات الخام فى جداول تكرارية - بالفصل الثالث (المبحث الأول) - أن التلخيص فى فئات تكرارية أدى إلى إختفاء بعض البيانات الأصلية (الخام) للظاهرة موضوع الدراسة، نتيجة عملية التبويب والتلخيص المشار إليها – فبالنظر إلى مجموعة الجداول فى المبحث المشار إليه يتضح لنا ما تقدم.

فنجد فى هذا الجدول ص ٤٨ أن الفئة الأولى حدودها أو مداها (١٢٥) وأقل من (١٣١) وتكرارها = ٦ ، وهذا يعنى أننا لا نعرف بدقة التوزيعات الأصلية لأطوال التلاميذ الستة (*) وهم تكرار الفئة الأولى ولكن نعرف حدود توزيعهم فقط، وهكذا بالنسبة للفئات الأخرى بالجدول المشار إليه ، وفى مثل هذه الحالة لكى نقوم بتحديد قيمة الوسط الحسابى لأطوال التلاميذ من الجدول المشار إليه عاليه، فإننا نلجأ إلى فرض منطقى وعادل من حيث توزيع التكرارات داخل كل فئة من فئات الجدول التكرارى ، حيث نفترض توزيع الأطوال بالتساوى داخل كل فئة ، وبمعنى آخر أن أطوال التلاميذ موزعة توزيعاً منتظماً داخل الفئة الواحدة ، وعلى أساس ذلك الفرض يمكننا إعتبار مركز كل فئة بأنه يمثل هذه الفئة تمثيلاً صحيحاً .

- طرق تحديد الوسط الحسابى :

هناك ثلاث طرق لتحديد قيمة الوسط الحسابى لبيانات مبوبة ، ويتوقف إستخدام كل طريقة منها على طبيعة البيانات بالجدول التكرارى من ناحية، ومدى الحاجة إلى تسهيل العمليات الحسابية من ناحية أخرى ، وتقليل احتمالات

(*) وهى الأطوال (١٢٥، ١٢٦، ١٢٧، ١٢٨، ١٢٩، ١٣٠).

التعرض للخطأ ـ خاصة إذا كانت البيانات ذات قيم كبيرة أو كسرية ـ من ناحية ثالثة ـ ، وتتلخص هذه الطرق فيما يلى :

١ ـ **الطريقة المباشـرة** : وفيها يتم إستخدام القيم الأصلية لقيم مفردات الظاهرة بدون إدخـال أى تعديلات جبرية عليها قبل حساب الوسط الحسابى لها وبمقتضاها نتبع الخطوات التالية :

١ ـ نوجد مركز كل فئة من فئات الجدول التكرارى ، وسنرمز له بالرمز (س) حيث أنه يمثل متوسط توزيع التكرارات داخل كل فئة .

$$\text{مركز الفئة} = \frac{\text{الحد الأدنى} + \text{الحد الأعلى}}{٢} \qquad (\text{للفئه})$$

٢ ـ نقوم بضرب مركز كل فئة (س) فى تكرار نفس الفئة (ك) فنحصل على (س ك) لكل فئة .

٣ ـ نقوم بجمع حواصل الضرب السابقة فى الخطوة (٢) لكافة الفئات فنحصل على مجـ س ك .

٤ ـ بقسمة مجـ س ك بالخطوة الثالثة على مجموع التكرارات مجـ ك ينتج لنا الوسط الحسابى المطلوب (سَ) أى أن :

$$\bar{\text{س}} = \frac{\text{مجـ س ك}}{\text{مجـ ك}} \qquad \text{......} (٣)$$

مثـــــال (٧) أوجد الوسط الحسابى لأطوال عينـة من التلاميذ من الجدول التكرارى التالى :

فئات الطول (ف)	١٢٥ـ	١٣١ـ	١٣٧ـ	١٤٣ـ	١٤٩ـ ١٥٥	المجموع
عددالتلاميذ(ك)	٦	١١	١٥	١٢	٦	٥٠

الحــــــل :

ف	ك	مراكز الفئات (س)	(س × ك)
١٢٥ـ	٦	١٢٨	٧٦٨
١٣١ـ	١١	١٣٤	١٤٧٤
١٣٧ـ	١٥	١٤٠	٢١٠٠
١٤٣ـ	١٢	١٤٦	١٧٥٢
١٤٩ـ ١٥٥	٦	١٥٢	٩١٢
المجموع	٥٠		٧٠٠٦

$$\bar{س} = \frac{مجـ\ س\ ك}{مجـ\ ك} = \frac{٧٠٠٦}{٥٠} = ١٤٠,١٢ \text{ سم}$$

ويلاحظ مما سبق أن الوسط الحسابى من توزيع تكرارى ، هو فى الواقع وسط حسابى مرجح ـ كما جاء بالبند أولا (ب) من هذا المبحث ـ والأوزان المستخدمة فى عملية الترجيح هنا هى تكرارات الفئات (ك) بدلا من الأوزان (و) كما جاء فى البند المشار إليه عالية فيما سبق .

مثـــــال (٨) الجدول التكراري التالي يوضح توزيع عينة من العاملين في أحد الشركات الإستثمارية حسب فئات العمر .

فئات العمر (ف)	٢٠-	٢٥-	٣٥-	٤٠-	٤٥-	٥٠-	٥٥_ ٦٠	المجموع
عدد العاملين (ك)	٤٢	٤٤	٧٥	٨٠	٧٠	٨٥	٥٤	٥٠٠

والمطلوب تقدير متوسط العمر للعاملين بهذه الشركة .

الحـــــل :

فئات العمر (ف)	التكرار (ك)	مراكز الفئات (س)	(س × ك)
٢٠_	٤٢	٢٢,٥	٩٤٥
٢٥_	٤٤	٢٧,٥	١٢١٠
٣٠_	٥٠	٣٢,٥	١٦٢٥
٣٥_	٧٥	٣٧,٥	٢٨١٢,٥
٤٠_	٨٠	٤٢,٥	٣٤٠٠
٤٥_	٧٠	٤٧,٥	٣٣٢٥
٥٠_	٨٥	٥٢,٥	٤٤٦٢,٥
٥٥_ ٦٥	٥٤	٥٧,٥	٣١٠٥
المجموع	٥٠٠		٢٠٨٨٥

$$\therefore \bar{س} = \frac{\text{مجـ س ك}}{\text{مجـ ك}} = \frac{٢٠٨٨٥}{٥٠٠} = ٤١,٧٧ \text{ سنة}$$

٢ ـــ طريقة الوسط الفرضى :

وتهدف هذه الطريقة أساساً إلى الوصول لنفس الوسط الحسابى فى الطريقة المباشرة لكن بمجهود حسابى أقل من ناحية ، وبتقليل إحتمال الوقوع فى الخطأ من ناحية أخرى كما أنها تصلح سواء كان التوزيع التكرارى منتظماً أو غير منتظم وتتلخص خطوات هذه الطريقة فيمايلى :

١ ـ تحديد مراكز فئات التوزيع التكرارى .

٢ ـ إختيار أحد مراكز الفئات السابقة واعتباره وسط فرضى وسنرمز له بالرمز (أ) .

٣ ـ إيجاد الانحرافات (ح) بين قيمة كل مركز من مراكزالفئات والوسط الفرضى المشار إليه عاليه أى أن ح = (س ـ أ) .

مع مراعاة بأن يكون الوسط الفرضى (أ) أحد مراكز الفئات (س) ويفضل المركز الذى أمام أكبر تكرار.

٤ ـ بضرب الانحراف (ح) فى كل فئة فى تكرار نفس الفئة (ك) وبالجمع نحصل على مجـ ح ك .

٥ – نحصل على الوسط الحسابى الفعلى أو الدقيق باستخدام الصيغة التالية.

$$\bar{س} = أ + \frac{مجـ ح ك}{مجـ ك} \qquad \text{...............} \qquad (٤)$$

حـل المـثـال رقم (٩) السـابق بطريقـة الوسـط الفرضى

فئات العمر	التكرار (ك)	مراكز الفئات (س)	الانحرافات عن الوسط الفرضى ح = (س-أ)	ح ك
٢٠ـ	٤٢	٢٢,٥	ـ ٢٠	ـ ٨٤٠
٢٥ـ	٤٤	٢٧,٥	ـ ١٥	ـ ٦٦٠
٣٠ـ	٥٠	٣٢,٥	ـ ١٠	ـ ٥٠٠
٣٥ـ	٧٥	٣٧,٥	ـ ٥	ـ ٣٧٥
٤٠ـ	٨٠	٤٢,٥	صفر	صفر
٤٥ـ	٧٠	٤٧,٥	+ ٥	+ ٣٥٠
٥٠ـ	٨٥	٥٢,٥	+ ١٠	+ ٨٥٠
٥٥ ـ ٦٥	٥٤	٥٧,٥	+ ١٥	+ ٨١٠
المجموع	٥٠٠	أ = ٤٢,٥		+ ٢٠١٠ ـ ٢٣٧٥ ـ ٣٦٥

$$\bar{س} = أ + \frac{مجـ\ ح\ ك}{مجـ\ ك}$$

$$= ٤٢,٥ + \left(\frac{-٣٦٥}{٥٠٠}\right)$$

$$= ٤٢,٥ - ٠,٧٣$$

= ٤١,٧٧ سنة (وهى نفس النتيجه بالطريقة المباشرة)

واضح من الطريقة السابقة أنها عملت على تخفيض الجهد الحسابى وتقليل احتمال الخطأ عنه فى الطريقة المباشرة، وتظهر أهميـة تلك الطريقة أكثر إذا ما كأن كل من س، ك ذات أعداد أو قيم أكبر عما هى عليه فى المثال السـابق أو كانت (س) تأخذ قيما كسرية مختلفة.

٣ ـ طريقة الانحرافات المختصرة .

لاتستخدم هذه الطريقة إلا فى حالات الجداول المنتظمة ذات أطوال الفئات الكبيرة، كما أنها تعمل على تخفيض كل من المجهود الحسابى واحتمالات التعرض للخطأ وتتلخص فى الخطوات التالية.

١ ـ علاوة على الحصول على كل من مراكز الفئات (س) واختيار وسط فرضى (أ) والانحراف (ح) بين مركز كل فئة والوسط الفرضى كما جاء فى الطريقة السابقة فإنه فى هذه الطريقة نضيف خطوات أخرى وهى :

٢ ـ الحصول على الانحرافات المختصرة(حَ) بقسمة الانحراف العادى (ح) على عدد ثابت (قد يكون هو طول فئةالجدول المنتظم ، وليكن ل) .

أى أن : حَ = $\frac{ح}{ل}$

٣ ـ ضرب كل من الانحراف المختصر (حَ) بكل فئة فى تكرار نفس الفئة (ك) للحصول على حَ ك لكل فئة وبالجمع نحصل على (مجـ حَ ك) .

٤ ـ بقسمة (مجـ حَ ك) على مجموع التكرارات (مجـ ك) نحصل على متوسط الانحراف المختصر (حَ) وبضربه فى (ل) نحصل على متوسط الانحراف العادى (ح) بالوحدات الأصلية .

٥ ـ نحصل على الوسط الحسابى الأصلى أو الدقيق بإستخدام الصيغة الرياضية التالية :

$$\bar{س} = أ + (\frac{مجـ\ حَ ك}{مجـ\ ك} \times ل) \quad .... (٥)$$

وبمقتضى الخطوات الإضافية فى هذه الطريقة فإننا سنحصل على أرقام أصغر وأسهل فى كل من حَ ، مجـ حَ ك بما يحقق الغرض الاساسى من وراء استخدام هذه الطريقة ، وعليه فإن استخدام هذه الطريقة فى الجداول الغير منتظمه لن يحقق الغرض من استخدامها ، وذلك بسبب عدم تساوى فئاتها ومن ثم عدم توافر العدد الثابت (ل) .

مثـــال (١٠) حل المثـال رقم (٩) السـابق بإسـتـخـدام طـريقـة الانحرافات المختصرة .

الحـــل :

فئات العمر (ف)	التكرار (ك)	مراكز الفئات (س)	الانحراف عن الوسط الفرضى ح = (س ـ أ)	الانحراف المختصر ح َ = ح / ل	ح َك
٢٠ ـ	٤٢	٢٢,٥	ـ ٢٠	ـ ٤	ـ ١٦٨
٢٥ ـ	٤٤	٢٧,٥	ـ ١٥	ـ ٣	ـ ١٣٢
٣٠ ـ	٥٠	٣٢,٥	ـ ١٠	ـ ٢	ـ ١٠٠
٣٥ ـ	٧٥	٣٧,٥	ـ ٥	ـ ١	ـ ٧٥
٤٠ ـ	٨٠	٤٢,٥	صفر	صفر	صفر
٤٥ ـ	٧٠	٤٧,٥	+ ٥	+ ١	+ ٧٠
٥٠ ـ	٨٥	٥٢,٥	+ ١٠	+ ٢	+ ١٧٠
٥٥ ـ ٦٥	٥٤	٥٧,٥	+ ١٥	+ ٣	+ ١٦٢
المجموع	٥٠٠	أ = ٤٢,٥		حيث ل = ٥	+ ٤٠٢ ـ ٤٧٥ ـ ٧٣

$$\bar{س} = أ + (\frac{مجـ ح َ ك}{مجـ ك} \times ل)$$

$$= ٤٢,٥ + (\frac{-٧٣}{٥٠٠} \times ٥)$$

$$= ٤٢,٥ - \frac{٣٦٥}{٥٠٠}$$

= ٤٢,٥ ـ ٠,٧٣ = ٤١,٧٧ سنه (نفس النتيجه بالطريقة المباشرة)

ونود أن نوجه النظر أنه لا يمكن إيجاد الوسط الحسابى ـ بأية طريقة من الطرق الثلاثـة السابقة من جدول تكرارى مفتوح سواء من طرف واحد أو من الطرفين وذلك لتعذر حساب مراكز الفئـات للفئات المفتوحـة فى مثل هذه الجداول، وفى مثل هذه الحالات لأمنا ص إلا البحث عن متوسط آخر خلاف الوسط الحسابى أو إستخدام العلاقـة بين المتوسطات كما سيأتى فيما بعد .

مثـــال (١١) حل المثال رقم (٧) السابق بطريقة الوسط الفرضى .

الفئـات (ف) (١)	التكرارات الأصليه (ك) (٢)	مراكز الفئات (س) (٣)	الانحرافات ح = (س ـ أ) (٤)	ح ك (٥)	نحصل على العمود (٥) بضرب الأعمدة (٤×٢)
١٢٥ ـ	٦	١٢٨	ـ ١٢	ـ ٧٢	أى بضرب كل تكرار أصلى فى الإنحراف المناظر له
١٣١ ـ	١١	١٣٤	ـ ٦	ـ ٦٦	
١٣٧ ـ	١٥	١٤٠	صفر	صفر	
١٤٣ ـ	١٢	١٤٦	+ ٦	+ ٧٢	
١٤٩ ـ ١٥٥	٦	١٥٢	+ ١٢	+ ٧٢	
المجموع	٥٠	أ = ١٤٠		+ ١٤٤ ـ ١٣٨ + ٦	

$$\therefore \bar{س} = ١٤٠ + \frac{٦}{٥٠}$$

= ١٤٠ + ٠,١٢ = ١٤٠,١٢ (نفس النتيجـة بالطريقة المباشرة) .

طريقـة الانحرافـات المختصـرة

$$\bar{س} = أ + (\frac{مجـ ح َ ك}{مجـ ك} \times ل)$$

(لاتستخدم الا إذا كانت أطوال الفئات متساوية أى فى الجداول التكرارية المنتظمة حيث ل = طول الفئة) .

مثـــال (١٢) حل المثال السابق رقم (١١) بطريقة الانحرافات المختصرة.

(١) الفئـات (ف)	(٢) التكرارات الأصليه(ك)	(٣) مراكزالفئات (س)	(٤) الانحرافات ح=(س-أ)	(٥) ل	(٦) ح َ = ح/ل	(٧) ح َ ك	نحصل على العمود (٧) بضرب الأعمدة (٦×٢) أى بضرب كل انحراف مختصر (ح َ) فى التكرار المناظر له . (ك)
١٢٥ـ	٦	١٢٨	١٢ـ	٦	٢ـ	١٢ـ	
١٣١ـ	١١	١٣٤	٦ـ	٦	١ـ	١١ـ	
١٣٧ـ	١٥	١٤٠	صفر	٦	صفر	صفر	
١٤٣ـ	١٢	١٤٦	٦+	٦	١+	١٢+	
١٤٩ـ١٥٥	٦	١٥٢	١٢+	٦	٢+	١٢+	
المجموع	٥٠	أ = ١٤٠				٢٤+ ٢٣ـ	
						١+	

$$\bar{س} = ١٤٠ + (\frac{١+}{٥٠} \times ٦)$$

$$= ١٤٠ + \frac{٦}{٥٠}$$

= ١٤٠ + ٠,١٢ = ١٤٠,١٢ (نفس النتيجه بالطريقتين السابقتين)

خصائص الوسط الحسابى :

١ ـ يأخذ فى الإعتبار جميع مفردات الظاهرة أو المتغير ـ دون إهمال أية مفردة منها عند حساب الوسط الحسابى لهذه الظاهرة ، لذلك يعتبر الوسط الحسابى من أهم مقاييس المتوسطات ، وبما جعله مقياساً قوياً وشائع الإستخدام فى البحوث الاحصائية .

٢ ـ مجموع انحرافات القيم فى ظاهرة ما عن وسطها الحسابى يساوى (الصفر) أى أن مجـ (س ـ سَ) = صفر ، كما أن خضوعة للعمليات الجبرية (من جمع وطرح وضرب) جعله مقياساً هاماً فى كافة البحوث الإحصائية .

٣ ـ نظراً لبساطة ووضوح الفكرة الإساسية المبنى عليها حساب قيمته مما جعله من مقاييس المتوسطات الشائعة الاستخدام فى البحوث الاحصائية .

٤ – مجموع مربعات انحرافات القيم عن وسطها الحسابى فيه يقل عن مجموع مربعات إنحرافات القيم عن أى مقاييس متوسطيه آخرى .

٥ ـ لايلزم تعديل التكرارات الأصلية عند حسابه من جداول تكرارية ذات فئات غير متساوية ـ جداول غير منتظمة .

٦ ـ أن الوسط الحسابى أقل مقاييس النزعة المركزية تأثراً بالاختلافات فى المعاينة ، ويزداد استقرارا كلما زاد حجم العينات (المنظورة) .

٧ ـ يتأثر الوسط الحسابى بالقيم المتطرفة سواء الصغيرة جداً أو الكبيرة جداً، ويعتبر فى مثل هذه الحالات مقياساً مضللاً لاننا نأخذ جميع مفردات الظاهرة عند حساب قيمته ، لذا فى مثل هذه الحالات يفضل استخدام مقياس متوسط آخر .

٨ ـ نظرا لاعتماد الوسط الحسابى عند حساب قيمته من توزيع تكرارى على مراكز الفئات لذلك يتعذر حساب قيمته من جداول تكرارية مفتوحة من أسفل أو من أعلى أو من الطرفين .

٩ ـ لايفضل استخدام الوسط الحسابى عند حساب متوسط النسب أو معدلات التغير ، ويفضل فى مثل تلك الحالات استخدام الوسط الهندسى .

١٠ ـ لا يمكن حساب الوسط الحسابى لبيانات غير كمية (وصفية) سواء أكانت ترتيبيه أو غير ترتيبيه .

١١ ـ لايمكن حسابه باستخدم الأساليب البيانية (الهندسية) .

المبحث الثانى

الوسيط *The Median*

١ ـ تعريفة : هو القيمة التى تتوسط مجموعة القيم تماماً اذا ما رتبت مجموعة هذه القيم ترتيباً تنازليا أو ترتيبياً تصاعدياً لمتغير معين، وبمعنى آخر هو القيمة التى يكون هناك ٥٠٪ من القيم أصغر منها ، ٥٠٪ من القيم أكبر منها إذا ما رتبت مجموعة هذه القيم ترتيباً تصاعدياً أو ترتيباً تنازلياً لظاهرة ما، وعادة ما يرمز له بالرمز ($ر_٢$) .

وعليه فإن الوسيط يتحدد بالموقع والقيمة ، فموقعة فى منتصف المشاهدات المرتبة ترتيباً تصاعدياً أو تنازلياً .

أما قيمة الوسيط فهى القيمة التى تقع فى منتصف القيم ، بحيث يكون عدد المفردات التى لها قيم أقل منها أو تساويها تساوى عدد المفردات التى تزيد عنها أو تساويها .

٢ ـ كيفيه حساب الوسيط لبيانات غير مبوبة .

(أ) الوسيط لبيانات وصفية ترتيبية :

مثال (١) حصل طالب على التقديرات التالية فى سبعة مواد دراسيه، ممتاز ، مقبول ، جيد جداً ، جيد جداً ، جيد ، ضعيف جداً ، ضعيف.

والمطلوب تحديد متوسط (وسيط) التقديرات لهذا الطالب .

الحل : تقديرات الطالب من البيانات الوصفية الترتيبية أى التى يمكن ترتيبها ترتيباً تصاعدياً أو ترتيباً تنازلياً .

وللوصول إلى وسيط التقديرات نتبع الخطوات التالية :

أولاً : ترتيب المشاهدات ترتيباً تصاعدياً أو ترتيباً تنازليـا كمايلي .

	(١)	(٢)	(٣)	(٤)	(٥)	(٦)	(٧)
ترتيب تصاعدى:	ضعيف جداً ،	ضعيف ،	مقبول ،	جيد	، جيد جداً ،	جيد جدا ،	ممتـاز
ترتيب تنـازلـى:	ممتـاز ،	جيد جداً ،	جيد جداً ،	جيد	، مقبول ،	ضعيف ،	ضعيف جداً
	٣ مشاهـدات			الوسيط	٣ مشاهـدات		

ثانيـاً : تحـديد ترتيب الوسـيط ـــ ولابد أن يكون العـدد فى مـثل هذه النوعيـة من البيانات « فردياً » .

والقاعدة هنا لتحديد ترتيب الوسيط هى المفردة : ($\frac{ن + ١}{٢}$) حيث ن = عدد المفردات (الفردية) .

وفى مثالنا ن = ٧

∴ ترتيب الوسيط = $\frac{٧ + ١}{٢}$ = $\frac{٨}{٢}$ = ٤ أى المشاهدة الرابعة فى الترتيب سواء كان الترتيب تصاعدياً أو تنازلياً.

ثالثاً : قيـمة وسـيط التـقـديرات هى المفـردة الرابعـة أى التقـدير « جيـد» ونلاحظ على الوسيط هنا أن عـدد التـقـديرات التى تسبـقـة = عـدد التقديرات التى تلحقه = ٣ تقديرات .

(ب) الوسيط لبيانات غير مبوبـة كميـة :

أولاً : اذا كان عدد المفردات فردياً :

١ ـ ترتيب الوسيط هنا هى المفردة : ($\frac{عدد المفردات (ن) + ١}{٢}$) .

٢ ـ قيمة الوسيط هى القيمة التى ترتيبها ($\frac{ن + ١}{٢}$) اذا ما رتبت مفردات المشاهدات ترتيباً تصاعدياً أو ترتيباً تنازليـا .

مثـــــال (٢) أوجد قيمة الوسيط للقيم التالية والتى تمثل درجات (٩) طلاب فى مادة المحاسبة .

٢٥ ، ٦٠ ، ٨٥ ، ٩٠ ، ٥٥ ، ٤٥ ، ٧٥ ، ١٠ ، ١٠٠ .

الحـــــل :

التربتيب التصاعدى

١٠، ٢٥ ، ٤٥ ، ٥٥ ، **٦٠** ، ٧٥ ، ٨٥ ، ٩٠ ، ١٠٠

ترتيب الوسيط = $\frac{٩ + ١}{٢}$ = ٥ أى أن القراءة الخامسة تمثل قيمة الوسيط

∴ قيمة الوسيط ($ر_٢$) = ٦٠

الترتيب التنازلى :

١٠٠ ، ٩٠ ، ٨٥ ، ٧٥ ، **٦٠** ، ٥٥ ، ٤٥ ، ٢٥ ، ١٠

ترتيب الوسيط = $\frac{٩ + ١}{٢}$ = ٥ أى القراءة الخامسة فى الترتيب

∴ قيمة الوسيط ($ر_٢$) = ٦٠

ونلاحظ أن هناك ٤ قيم سابقة أقل من (٦٠)، ٤ قيم لاحقة أكبر من (٦٠)

ثانياً : إذا كان عدد المفردات زوجياً :

هنا لن يكون ترتيب الوسيط مفردة من المفردات المحددة بعد ترتيب هذه المفردات أو المشاهدات تنازلياً أو تصاعدياً كما هو الحال فى حالة ما إذا كان عدد المفردات فردياً، لكنها ستكون مفردة ضمنية تتحدد على أساس الوسط الحسابى للمفردتين ($\frac{ن}{٢}$ ، $\frac{ن}{٢}$ + ١) وبمعنى آخر فإن:

قيمة الوسيط = $\frac{\left(\frac{ن}{٢} + \frac{ن}{٢} + ١\right)}{٢}$ أى متوسط القيمتين اللتين

ترتيبهما ($\frac{ن}{٢}$ ، $\frac{ن}{٢}$ + ١)

مثـــال (٣) أوجد قيمة الوسيط للقيم التالية ، والتى تمثل درجات (١٠) طلاب فى مـادة المحاسبة . .

٥٥ ، ٢٥ ، ٦٠ ، ٨٥ ، ٩٠ ، ٥٥ ، ٤٥ ، ٧٥ ، ١٠ ، ١٠٠

الحـــل :

ترتيب تصاعدى

١٠ ، ٢٥ ، ٤٥ ، ٥٥ ، [٥٥ ، ٦٠] ، ٧٥ ، ٨٥ ، ٩٠ ، ١٠٠

ترتيب الوسيط = $\frac{(\frac{١٠}{٢} + \frac{١٠}{٢} + ١)}{٢}$

= $(\frac{٥ + ٦}{٢})$ (أو الوسط الحسابى للقيمتين الخامسة، والسادسة)

قيمة الوسيط = $\frac{٥٥ + ٦٠}{٢} = \frac{١١٥}{٢} = ٥٧,٥$ درجة

ترتيب تنـــازلى :

١٠٠ ، ٩٠ ، ٨٥ ، ٧٥ ، [٦٠ ، ٥٥] ، ٥٥ ، ٤٥ ، ٢٥ ، ١٠

٤ مشاهـدات   ٤ مشاهـدات

ترتيب الوسيط = $\frac{(\frac{١٠}{٢} + \frac{١٠}{٢} + ١)}{٢}$

= $\frac{٥ + ٦}{٢}$ (الوسط الحسابى للقيمتين الخامسة والسادسة)

قيمة الوسيط = $\frac{٦٠ + ٥٥}{٢} = ٥٧,٥$ درجة

ونلاحظ مما سبق أن الوسيط فى حالة البيانات الزوجيه هو متوسط القيمتين التى تسبقهما عدد من القيم أقل منهم أو تساويهم وتلحق بهما عدد من القيم أكبر منهم أو تساويهم بعد ترتيب مجموعة القيم ترتيباً تنازلياً أو تصاعدياً.

٣ ـ كيفية حساب الوسيط لبيانات مبوبة :

ويمكن أن يتم حساب الوسيط هنا بطريقتين مختلفتين .

(أ) الطريقة الحسابيـة : ويتم ذلك وفقاً للخطوات التاليـة :

١ ـ يتم تحويل الجدول التكرارى البسيط إلى جدول تكرارى متجمع صاعد أو جدول تكرارى متجمع هابط (أو نازل) سواء كان الجدول مطلق أو نسبى.

٢ ـ تحديد ترتيب الوسيط ($\frac{مجـ ك}{٢}$)حيث (ك) مجموع التكرارات .

٣ ـ تحديد موقع الوسيط (أى تحديد الفئة التى يقع خلالها الوسيط) .

٤ ـ تحديد قيمة الوسيط ($ر_م$) وفقاً للصيغة التالية (باستخدام الجدول التكرارى المتجمع الصاعد) .

$$= \text{الحد الأدنى للفئة الوسيطة} + \left(\frac{\text{ترتيب الوسيط ـ التكرار المتجمع الصاعد السابق}}{\text{تكرار الفئة الوسيطية}} \times \text{طول الفئة الوسيطية (ل)} \right)$$

مثـال (٤) أوجد وسيط الطول لعدد ٥٠ طالباً موزعين تكرارياً كمايلى :

فئات الطول(ف)	١٢٥ـ	١٣١ـ	١٣٧ـ	١٤٣ـ	١٤٩ـ ١٥٥	المجموع
عددالتلاميذ(ك)	٦	١١	١٥	١٢	٦	٥٠

(×) يختصر: التكرار المجتمع الصاعد (ت، م .ص) أما التكرار المتجمع الهابط فيختصر بـ(ت . م .هـ).

الحـــــل :

ف	ك	حدود الفئات	ت.م.ص	
١٢٥ـ	٦	أقل من ١٢٥	صفر	
١٣١ـ	١١	أقل من ١٣١	٦	
١٣٧ـ	١٥	أقل من ١٣٧	١٧	ت.م.ص سابق
←			٢٥	ترتيب الوسيط
١٤٣ـ	١٢	أقل من ١٤٣	٣٢	ت.م.ص لاحق
١٤٩ـ ١٥٥	٦	أقل من ١٤٩	٤٤	
		أقل من ١٥٥	٥٠	
المجموع	٥٠			

ترتيب الوسيط = $\frac{\text{مجـ ك}}{٢}$ = $\frac{٥٠}{٢}$ = ٢٥

الوسيط = [١٣٧+ ($\frac{٢٥ - ١٧}{١٥}$ × ٦)]

= ١٣٧ + ($\frac{٨}{١٥}$ × ٦)

= ١٣٧ + $\frac{٤٨}{١٥}$

= ١٣٧ + ٣,٢

= ١٤٠,٢ سم

الوسيط من تكرار متجمع هابط :

الوسيط (ر٢) =[الحد الأدني للفئة الوسيطية + (التكرار المتجمع الهابط السابق ـ ترتيب الوسيط) / (تكرار الفئة الوسيطية) × طول الفئة الوسيطية]

مثـــال (٤) : حل المثال السابق باستخدام جدول تكرارى متجمع هابط

اعداد جدول تكرارى متجمع هابط

الفئـــات ف	التكرار (ك)	حدود الفئات	ت.م.هـ	
١٢٥ـ	٦	١٢٥ فأكثـر	٥٠	
١٣١ـ	١١	١٣١ فأكثـر	٤٤	
١٣٧ـ	١٥	١٣٧ فأكثـر	٣٣	ت.م.هـ سابق
			٢٥ ←	ترتيب الوسيط
١٤٣ـ	١٢	١٤٣ فأكثـر	١٨	ت.م.هـ لاحق
١٤٩ـ١٥٥	٦	١٤٩ فأكثـر	٦	
		١٥٥ فأكثـر	صفر	
المجموع	٥٠			

ترتيب الوسيط = مجـ ك / ٢ = ٥٠ / ٢ = ٢٥

الوسيط (ر٢) = ١٣٧+ ((٣٣ ـ ٢٥) / ١٥ × ٦)

= ١٣٧ + (٨ / ١٥ × ٦)

= ١٣٧ + ٣,٢ = ١٤٠,٢ سم

(نفس الجواب من تكرار متجمع صاعد)

تحديد قيمة الوسيط بإستخدام الرسم البيانى .

نستطيع ايجاد قيمة الوسيط ($ر_٢$) من الرسم البيانى بإستخدام أحد المنحنيان المتجمعان الصاعد أوالهابط وفقاً لمايلى :

١ ـ ايجاد ترتيب الوسيط = $\frac{مجـك}{٢}$

٢ ـ رسم المنحنى المتجمع الصاعد أو المنحنى المتجمع الهابط للتوزيع التكرارى .

٣ ـ تعيين نقطة ترتيب الوسيط على المحور الرأسى (محور الصادات)

٤ ـ رسم مستقيم من النقطة السابقه يوازى المحور الأفقى (محور السينات) حتى يقابل المنحنى المتجمع عند نقطة ولتكن (ط) .

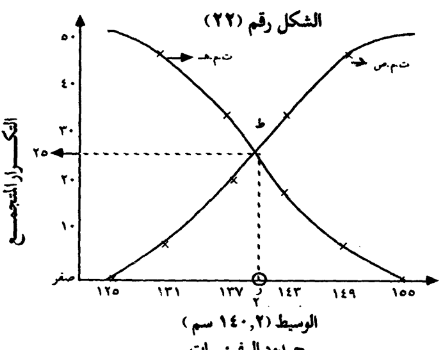
٥ ـ نسقط من النقطه المشار إليها (ط) عمود على المحور الأفقى (السينات) ليقابله فى نقطة هى عبارة عن قيمة الوسيط ($ر_٢$) .

مثـــال (٦) باستخدام الرسم البيانى أوجد قيمة الوسيط فى المثال رقم(٤) السابق .

الحـــل :

ترتيب الوسيط = $\frac{مجـك}{٢} = \frac{٥٠}{٢} = ٢٥$

الشكل رقم (٢٢)



الوسيط (١٤٠,٢ سم)

حـدود الـفـئـــات

يمكن أيضاً تحديد قيمة الوسيط من الرسم بإستخدام منحنى متجمع هابط كما فى الشكل رقم (٢٢) السابق .

كما نلاحظ أن المنحنى المتجمع الصاعد ، والمنحنى المتجمع الهابط تقاطعاً فى نقطة واحدة (ط) هى نقطة الوسيط ترتيبياً أما قيمته فى نقطة التقاء العمود النازل منها على المحور الأفقى وهى نقطه ($ر_م$)

كما نود أن نشير هنا أنه يمكن ايجاد الوسيط حسابياً أو بيانياً من جدول تكرارى نسبى .

مثـــال (٧) من الجدول التكرارى النسبى التالى أوجد :

(أ) قيمة الوسيط حسابياً .

(ب) قيمة الوسيط باستخدام أسلوب الرسم البيانى .

الفئـــات	١ـ ٦	٧ ـ ١٢	١٣ـ١٨	١٩ـ٢٤	٢٥ـ٣٠	٣١ـ٣٦	اجمالى التكرارات
التكرار المطلق	٢	٧	١١	١٠	٨	٢	٤٠
التكرار النسبى	٠,٠٥	٠,١٧٥	٠,٢٧٥	٠,٢٥	٠,٢٠	٠,٠٥	١,ـــ

الحــــل : الجدول التكرارى المتجمع الصاعد النسبى :

ف	التكرار النسبى	حدود الفئات	التكرار المتجمع	الصاعد النسبى
١ـ ٦	٠,٠٥	أقـل من ١	صفر	
٧ـ ١٢	٠,١٧٥	أقـل من ٧	٠,٠٥	
١٣ـ ١٨	٠,٢٧٥	أقـل من ١٣	٠,١٨	
١٩ـ ٢٤	٠,٢٥	أقـل من ١٩	٠,٤٥٥	ت . م . ص السابق ←
		←	٠,٥	ترتيب الوسيط
٢٥ـ ٣٠	٠,٢٠	أقـل من ٢٥	٠,٧٠٥	ت . م . ص اللاحق ←
٣١ـ ٣٦	٠,٠٥	أقـل من ٣١	٠,٩٠٥	
		أقـل من ٣٦	١,ـ	
المجموع	١ ـــ			

$$\text{ترتيب الوسيط} = \frac{\text{مجـ ك}}{٢} = \frac{١}{٢} = ٠,٥$$

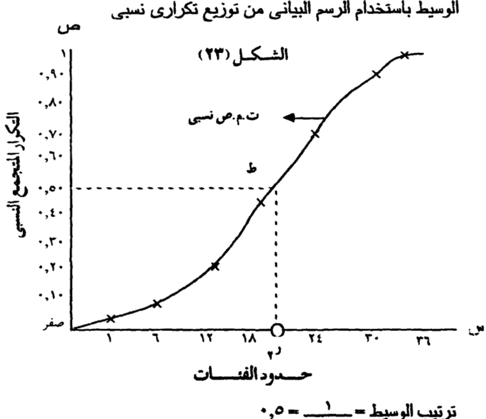
$$\text{قيمة الوسط } (ر_٢) = ١٩ + \left(\frac{٠,٥ - ٠,٤٥٥}{٠,٢٥} \times ٦\right)$$

$$= ١٩ + \left(\frac{٠,٠٥}{٠,٢٥} \times ٦\right)$$

$$= ١٩ + \frac{٠,٣٠}{٠,٢٥}$$

= ١٩ + ١,٢ = ٢٠,٢ سم

الوسيط باستخدام الرسم البيانى من توزيع تكرارى نسبى



$$\text{ترتيب الوسيط} = \frac{١}{٢} = ٠,٥$$

ونود أن نشير هنا أن طريقة حساب الوسيط لا تتأثر سواء أكانت من جدول تكرارى غير منتظم أو مفتوح كما يتضح لنا ذلك من المثال التالى :

مثـــال (٨) فيما يلى جدول يحدد درجة الذكاء لعدد ١٢٠ طالباً باحدى المدارس والمطلوب تحديد وسيط درجه الذكاء .

(أ) حسابياً   (ب) بيانياً

درجةالذكاء	٥٠ـ	٧٠ـ	١٠٠ـ	١٥٠ـ	٢٠٠ فأكثر	المجموع
عدد الطلبة	١٢	٣٥	٤٠	١٥	١٨	١٢٠

الحـــــل :

ف	ك	حدود الفئات	التكرار المتجمع الصاعد	ملاحظات
٥٠ـ	١٢	أقل من ٥٠	صفر	
٧٠ـ	٣٥	أقل من ٧٠	١٢	
١٠٠ـ	٤٠	أقل من ١٠٠	٤٧	ت.م.ص السابق ←
			٦٠ ←	ترتيب الوسيط
١٥٠ـ	١٥	أقل من ١٥٠	٨٧	ت.م.ص اللاحق ←
٢٠٠ فأكثر	١٨	أقل من ٢٠٠	١٠٢	
		أقل من الحد الأعلى المفتوح	١٢٠	
المجموع	١٢٠			

رغم أن الجدول التكرارى غير منتظم - أطوال فئاته مختلفة - ومفتوح من أعلى فقد تم إعداد الجدول التكرارى المتجمع الصاعد كما هو الحال فى الجدول المنتظم المقفول، ولن يختلف الأمر فى باقى الخطوات عما هو عليه الحال فيما سبق فى الجدول المنتظمة والمقفولة .

(أ) الوسـيط الحسـابى :

$$١ - \text{ترتيب الوسيط} = \frac{\text{مجـ ك}}{٢} = \frac{١٢٠}{٢} = ٦٠$$

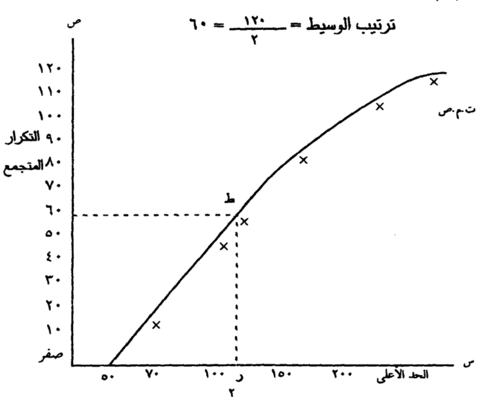
ر ٢ (وسيط درجة الذكاء)

$$= ١٠٠ \left(\frac{٦٠ - ٤٧}{٨٧ - ٤٧} \times ٥٠ \right)$$

$$= ١٠٠ + \left(\frac{١٣}{٤٠} \times ٥٠ \right)$$

(ب) الوسيط بيانيا = ١٠٠ + ١٦,٢٥ = ١١٦,٢٥ درجة .

$$\text{ترتيب الوسيط} = \frac{١٢٠}{٢} = ٦٠$$



شـــــكل رقم (٢٤)

مقاييس أخرى محسوبة بنفس أسلوب الوسيط (حسابيا وهندسيا):

(١) الربيع الأول (الأدنى)　　　(٢) الربيع الثالث (الأعلى)

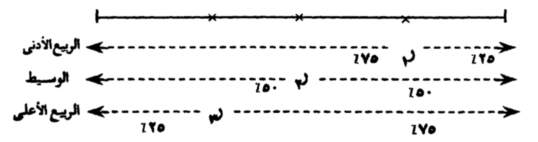
تعريف الربيع الأول (الأدنى) ويأخذ الرمز (ر١) : Lower Quartile

وهو قيمة المفردة التى تقسم مجموعة القيم المرتبة ترتيباً تصاعديا إلى قسمين بحيث يقع ٢٥٪ من القيم قبلها ، ويقع ٧٥٪ من القيم بعدها أى أنه قيمة المفردة التى تقع فى نهاية الربع الأول من القيم المرتبة .

تعريف الربيع الثالث (الأعلى) ويأخذ الرمز (ر٣) Upper Quiaritile

وهو قيمة المفردة التى تقسم مجموعة القيم المرتبة ترتيباً تصاعدياً إلى قسمين بحيث يقع ٧٥٪ من القيم قبلها ، ويقع ٢٥٪ من القيم بعدها أى أنه قيمة المفردة التى تقع فى نهاية الربع الثالث من القيم المرتبة تصاعديا ، وعليه فإنه إذا ما رتبت مجموعة من القيم ترتيباً تصاعدياً فإن الربيع الأدنى (ر١) والوسيط (ر٢) والربيع الأعلى (ر٣) يكون موقعها كما يتضح من الشكل التالى:

شكل رقم (٢٣)



مثال (٩) أوجد كل من الربيع الأدنى والربيع الأعلى فى المثال رقم (٨) حسابياً ، وبيانياً .

الحل :

نقوم بإنشاء جدول تكرارى متجمع صاعد كخطوة أولى :

أولاً : الربيـــع الأدنى ($ر_1$) حسابياً

١ ـ ترتيب الربيع الأدنى = $\frac{مجـ ك}{٤}$

٢ ـ نحدد موقع الربيع الأدنى بالجدول التكرارى المتجمع ، ونحدد فئة الربيع الأدنى .

٣ ـ للحصول على قيمة الربيع الأدنى ($ر_1$) نستخدم الصيغة الرياضية التالية :

$$= \left[\text{الحد الأدنى لفئة الربيع الأدنى} + \left(\frac{\text{ترتيب الربيع الأدنى ـ التكرار المتجمع الصاعد السابق}}{\text{تكرار فئة الربيع الأدنى}} \times \text{طول فئة الربيع الأدنى} \right) \right]$$

كما يلى :

ف	ك	حدود الفئات	ت . م . ص	
١٢٥ـ	٦	أقل من ١٢٥	صفر	
١٣١ـ	١١	أقل من ١٣١	٦	ت م ص السابق
			١٢,٥ ←	← ترتيب $ر_1$ ←
١٣٧ـ	١٥	أقل من ١٣٧	١٧	ت م ص
			٣٢	السابق
١٤٣ـ	١٢	أقل من ١٤٣	٣,٧٥	←ترتيب $ر_3$ ←
١٤٩ـ١٥٥	٦	أقل من ١٤٩	٤٤	
		أقل من ١٥٥	٥٠	
المجموع	٥٠			

$$\text{ترتيب } (ر_1) = \frac{\text{مجـ ك}}{٤} = \frac{٥٠}{٤} = ١٢,٥$$

$$ر_1 = ١٣١ + \left(\frac{١٢,٥ - ٦}{١١} \times ٦ \right)$$

$$= ١٣١ + \frac{٣٩}{١١}$$

$$= ١٣١ + ٣,٥٥ = ١٣٤,٥ \text{سم}$$.

ثانياً : الربيع الأعلى حسابياً:

١ ـ ترتيب الربيع الأعلى ($ر_3$) = $\frac{\text{مجـ ك}}{٤} \times ٣$.

٢ ـ نحدد موقع الربيع الأعلى بالجدول التكرارى المتجمع الصاعد ونحدد فئـة الربيـع الأعلى .

٣ ـ للحصول على قيمـة الربيع الأعلى ($ر_3$) نستخدم الصيغه الرياضية التالية :

$$= \left[\text{الحد الأدنى لفئة الربيع الأعلى} + \left(\frac{\text{ترتيب الربيع الأعلى ـ التكرار المتجمع الصاعد السابق}}{\text{تكرار فئـة الربيـع الأعلى}} \times \text{طول فئة الربيع الأعلى} \right) \right]$$

$$\text{ترتيب } ر_3 = \frac{٥٠}{٤} \times ٣٠ = ٣٧,٥$$

$$\text{قيمة } (ر_3) = ١٤٣ + \left(\frac{٣٧,٥ - ٣٢}{١٢} \times ٦ \right)$$

$$= ١٤٣ + ٢,٧٥$$

$$= ١٤٥,٧٥ \text{ سم}$$

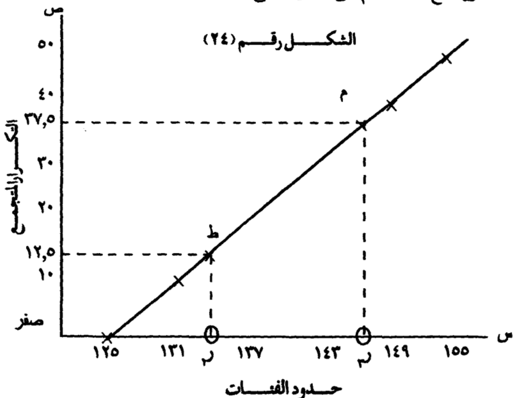
الربيع الأدنى والربيع الأعلى هندسياً :

١ ـ نقوم برسم محورين متعامدين ، ونحدد عليه المنحنى المتجمع الصاعد كما هو الحال عند تحديد الوسيط من الرسم سابقاً .

٢ ـ نحدد ترتيب ($ر_١$) ، ومن هذه النقطة على محور الصادات نرسم خط مستقيم يوازى محور السينات حتى يقابل المنحنى المتجمع فى نقطة ولتكن (ط) ، نسقط من (ط) مستقيم عمودى على المحور الأفقى ليقابلة فى نقطة ، هى قيمة ($ر_١$)

٣ ـ أيضاً نحدد ترتيب ($ر_٣$) ، ومن هذه النقطة على محورالصادت نرسم خط مستقيم يوازى محور السينات ، حتى يقابل المنحنى المتجمع فى نقطة ولتكن (م) ، نسقط من (م) مستقيم عمودى على المحور الأفقى ليقابله فى نقطة هى قيمة ($ر_٣$) .

ويتضح لنا ما تقدم من الشكل التالى :



العلاقة بين الوسيط والربيعين :

١ ـ عدد القيم المحصورة بين $ر_١$ ، $ر_٣$ تساوى نصف عدد القيم كلها .

٢ ـ الفرق بين الوسيط والربيع الأدنى لا يساوى الفرق بين الربيع الأعلى والوسيط الا اذا كان التوزيع التكرارى متماثلاً (معتدلا) ففى مثالنا السابق نجد أن :

، $ر_٢ - ر_١$ = ١٤٠,٢ ـ ١٣٤,٥

= ٥,٧ سم

، $ر_٣ - ر_٢$ = ١٤٥,٧٥ ـ ١٤٠,٢

= ٥,٥٥ سم

أن التوزيع التكرارى فى هذا الجدول غير متماثل .

(نعتبر ماسبق خاصيه من خواص المنحنى المتماثل وتستخدم لإختبار تماثل المنحنى من عدمه) .

ويلاحظ أنه كلما زاد الفرق السابق كلما بعد التوزيع عن التماثل والعكس صحيح .

بعض خصائص الوسيط :

١ ـ يحدد الوسيط القيمة الوسطى للتوزيع .

٢ ـ اذا ضربت قيمة الوسيط فى عدد مفردات التوزيع فلا نحصل على المجموع الأصلى للتوزيع كما هو الحال فى الوسط الحسابى ، لذلك فقد قلت القيمة العلمية للوسيط عن الوسط الحسابى.

٣ ـ لاتدخل جميع مفردات الظاهرة أو المتغير عند حساب قيمة الوسيط كما هو الحال فى الوسط الحسابى ، لذا يعتبر الوسيط مقياساً مناسباً للمتوسط فى التوزيعات الشاذة (أو المتطرفة)ومناسباً أيضاً فى حالة التوزيعات التكرارية المفتوحة لأنه يعتمد فى حسابه على منطقة الوسط بعد ترتيب البيانات باستثناء الحالة التى يقع الوسيط فى مدى فئة مفتوحة من أسفل أو من أعلى التوزيع التكرارى.

٤ ـ بجانب إمكانية حساب الوسيط للبيانات الكمية فهو صالح للإستخدام أيضاً فى حالة البيانات الوصفية بشرط أن تكون البيانات الأخيرة ترتيبية أى قابلة للترتيب تصاعدياً أو تنازلياً .

٥ ـ يمكن حسابة بيانياً بعكس الوسط الحسابى .

٦ ـ مجموع الانحرافات المطلقة ـ أى بعد إهمال إشارات هذه الانحرافات لقيم التوزيع تكون أقل ما يمكن.

٧ ـ فى حالة البيانات غير المبوبة الزوجيه ، يعتمد الوسيط عند إيجاد قيمته على الوسط الحسابى ، وبمعنى آخر فى مثل هذه الحالة يدخل مقياس آخر للنزعة المركزية عندحساب قيمة الوسيط .

٨ ـ نظراً لإعتماد الوسيط على بيانات القيم الوسطى عند حساب قيمته بعد ترتيبها ـ فهذا يعنى أننا لا نستفيد بكافة البيانات عن الظاهرة محل القياس عند حساب قيمته ، وللسبب السابق ، فان الوسيط لايعتبر ممثل جيد للمتوسطات اذا كان هناك إختلافاً بيّنا فى حجم القيم قبل وبعد القيمة الوسيطية عن تلك القيم الوسطى لنفس التوزيع بعكس الوسط الحسابى .

٩ ـ اذا إختلفت الأهمية النسبية لوحدات الظاهرة موضوع الدراسة فلا يعتبر الوسيط مفيداً فى الحالة السابقة ، لأن الوسيط لايقبل عملية الترجيح بالأوزان كما هو الحال فى الوسط الحسابى المرجح .

١٠ ـ الوسيط عرضه للإختلافات الواضحه وعدم الإستقرار تبعاً لإختلاف وتباين العينات، وعليه يكون الوسيط أكثر تأثراً من الوسط الحسابى فى حالة إستخدام أسلوب المعاينة.

المبحث الثالث

المنـــــوال (*) *Mode*

١ ـ تعريفـه : يعتبر المنوال أحد مقاييس المتوسطات ، ويعرف المنوال «بأنه القيمة الأكثر ظهوراً أو تكراراً أو شيوعاً فى مجموعة القيم » ونود أن نشير هنا بأن المنوال إن وجد فى توزيع ما ، فإنه قد يكون وحيد القيمة كما قد يكون للتوزيع منوالين أو أكثر ، وسنرمز له بالرمز (م) .

أولاً : المنـــوال لبيانات غير مبـــوبـــة (وصفية) :

(أ) حالـة البيانات الوصفية غير الترتيبية.

مثـــال (١) فيما يلى عينة مكونة من ٨ أشخاص طبقاً للحالة الإجتماعية: متزوج ، أرمل ، أعزب ، مطلق ، متزوج ، أعزب ، أعزب ، أعزب . والمطلوب تحديد منوال البيانات السابقة.

الحـــــل :

بالنظر إلى مفردات العينـة حسب الحالة الإجتماعيـة .

(١) حالة الزواج : تكررت مرتين .

(٢) حالة الأرمل : تكررت مرة واحدة فقط .

(٣) حالة المطلق : تكررت مرة واحدة فقط .

(٤) حالة الأعزب : تكررت أربع مرات .

أى أن حالة « الاعزب » هى الحالة الأكثر تكراراً أو شيوعاً فى الحالات الاجتماعيـة المدروسـة وتساوى (٤) .

(*) يطلق عليه البعض « النمط » .

وعليـــه فــــإن :

منـوال هذه العينـة بالنسبـة للحالة الإجتماعيـة هى «حالة الأعزب» .

مثـــــال (٢) فى حــقل تجــريبى للزهور تبين أن توزيـع الزهور به وعددها ٤٠ زهرة توزعت حسب اللون كما يلى :

(١) عدد الزهور ذات اللون الأبيض : ١٠ زهـور .

(٢) عدد الزهـور ذات اللون الأحمر : ١٠ زهـور .

(٣) عدد الزهور ذات اللون الأزرق : ٨ زهـور .

(٤) عدد الزهور ذات اللون البنفسجى : ٦ زهـور .

(٥) عدد الزهور ذات اللون المووف : ٥ زهـور .

(٦) عدد الزهور ذات اللون الأصفر : زهـرة واجدة .

أوجد منوال اللون فى المجموعة السابقة للزهـور .

الحـــــل :

نجد أن كلا من اللونين الأبيض والأحمر هما الأكثر شيوعاً فى مجموعة الألوان المختلفة للزهـور ، وكل منهما =١٠ زهرات، لذا نقول أن مجموعة الوان الزهـور المشار اليها فيما سبق لها منوالين وليس منوال واحد .

أى أن المنوال هنا هما الزهور ذات اللونين الأبيض والأحمر.

وهكذا يمكننا بإتبـاع الأسلوب السابق حساب منوال الظواهر الوصفيـة غير الترتيبيـة الأخرى .

(ب) حـالة البيـانات الوصـفـيـة الترتيـبيـة :

ومن الظواهر التى تنطبق عليها هذه الحالة، تقديرات درجة الطلاب سواء فى مادة ما أو التقدير العام للنجاح.

مثـــــال (٣) فيما يلى التقديرات فى مادة الرياضيات لعينـة مكونة من ٧طلاب فى السنـة الدراسيـة الأولى وكانت بالترتيب كمايلى :

(الطلاب) : (١) (٢) (٣) (٤) (٥) (٦) (٧)

(التقدير) : ممتاز ، مقبول ، جيد جداً ، جيد جداً ، جيد ، ضعيف جداً ، ضعيف

والمطلوب : تحديد منوال تقدير النجاح فى هذه المادة بالعينة السابقة.

الحـــــل :

الطالبين الذين ترتيبهما (٣) ، (٤) حصلاً على تقدير (جيد جداً) ، وباقى الطلاب حصل طالب واحد فقط على التقديرات الأخرى وهى ممتاز ، مقبول ، جيد ، ضعيف ، ضعيف جداً .

وعليه فمنوال التقدير فى العينـة السابقة هو تقدير «جيد جداً » لأنـه تكرر مرتين ومن ثم فهو التقدير الشائع فى العينـة .

وهكذا بإتباعنا الأسلوب السابق يمكننا حساب منوال الظواهر الوصـفيـة الترتيبيـة الأخرى .

ثانياً : المنـــوال لبيـــانـات كميـــة :

(أ) المنـوال لبيـانـات كميـة غـير مبوبـة (مفردة):

مـــثـــال (٤) فـيمـا يلى درجـات النجـاح فى مـادة الاقـتـصـاد لثلاث مجموعات من الطلاب كل مجموعة مكونـة من عشرة طلاب .

الطـــــلاب	(١)	(٢)	(٣)	(٤)	(٥)	(٦)	(٧)	(٨)	(٩)	(١٠)
المجموعة الأولى	٢٥	٦٠	٨٥	٩٠	٥٥	٤٥	٥٦	٧٥	٩	١٠٠
المجموعة الثانيـة	٣٠	٦٥	٨٥	٩٥	٥٥	٤٥	٥٥	٧٦	١٠	١٠٠
المجموعة الثالثة	١٥	٦٤	٨٥	٨٠	٥٥	٤٥	٥٥	٨٥	٨	١٠٠

المطلوب : تقدير منوال درجـة النجـــاح فى كل مجموعه

المجموعة الأولى : ليس لها منوال لأنه لم تتكرر أى درجه منها أكثرمن مرة واحدة.

المجموعة الثانية : منوال الدرجات بها هو (٥٥) لأنها الدرجة الوحيدة التى تكررت مرتين .

المجموعة الثالثة : لها منوالين هما (٥٥) ، (٨٥) لأن كل منهما تكررت بمقدار ثابت ، وهو مرتين

(ب) المنوال لبيانات كمية (مبوبة) أى فى صورة توزيع تكرارى :
وسنفرق هنا بين الجداول التكرارية المنتظمة والجداول التكرارية غير المنتظمة.

أولاً : الجداول التكرارية المنتظمة :

مثـــال (٥) أوجد منوال الطول بالسنتيمتر لمجموعة الطلاب فى الجدول التكرارى التالى :

فئات الطول	١٢٥-	١٣١-	١٣٧-	١٤٣-	١٤٩_١٥٥	المجموع
عدد الطلاب	٦	١١	١٥	١٢	٦	٥٠

الحـــل :

سنتاول فيما يلى طريقتين مختلفين لايجاد منوال الطول فى المثال السابق.
الطريقة الأولى : طريقة الفروق (بيرسون (*)): وتتلخص خطواتها فيما يلى :
١ ـ نبحث عن أكبر تكرار فى التوزيع .
٢ – نحدد الفئة المقابلة لأكبر تكرار وليكن (ك$_2$) ، ويطلق عليها الفئة المنوالية وليكن طولها (ل)، وهى الفئة التى يقع خلالها المنوال أى يقع المنوال بين حدها الأدنى وحدها الأعلى.
٣ ـ نحدد الفئه السابقة للفئة المنوالية ، ونحدد التكرار المقابل لها وليكن(ك$_1$).

(*) (Karl person)

٤ ـ نحدد الفئه اللاحقه للفئة المنواليه ، ونحدد التكرار المقابل لها وليكن (ك$_3$).

مما تقدم يتحدد لنا جدول تكرارى جزئى (المحدد بالمستطيل) مكون من ثلاث فئات من فئات الجدول التكرارى الأصلى كما يلى :

	الفئات (ف)	التكرار الأصلى (ك)	
	١٢٥ـ	٦	
الجدول الجزئى	١٣١ـ	١١(ك$_1$)	الفئة السابقة ⎫ الفرق الأول (Δ_1) = ٤
الجدول الجزئى	١٣٧ـ	١٥ (ك$_2$)	الفئة المنوالية ⎬
الجدول الجزئى	١٤٣ـ	١٢(ك$_3$)	الفئة اللاحقة ⎭ الفرق الثانى (Δ_2) = ٣
	١٤٩ـ١٥٥	٦	
	المجموع	٥٠	

من الجدول التكرارى الجزئى (المحدد بالمستطيل) نحدد كلاً من :

١ – الفرق الأول (Δ_1) = (تكرار الفئة المنوالية – تكرار الفئة السابقة لها)

= ك$_2$ – ك$_1$

= (١٥ ـ ١١) = ٤

٢ – الفرق الثانى (Δ_1) = (تكرار الفئة المنوالية – تكرار الفئة السابقة لها)

= ك$_2$ – ك$_3$

= (١٥ ـ ١٢) = ٣

وبفرض أن المنوال يقع على الخط المستقيم أ ب وهى حدود الفئة المنوالية حيث يبعد عن الحد الأدنى بمسافة (س) وعن الحد الأعلى بمسافة (ل ـ س)، وحيث أن النسبة التى تقسم هذا الخط إلى جزئية س : (ل ـ س) تساوى النسبة بين الفرقين Δ_1 ، Δ_2 كما يلى :

الحد الأعلى للفئة المنوالية　　　　　الحد الأدنى للفئة المنوالية

أ　　س　　المنوال　　(ل ـ س)　　ب

الفئة المنوالية

الفرق الثانى		الفرق الأول

$\Delta_2 =$ ك$_2$ ـ ك$_3$　　　　　$\Delta_1 =$ ك$_2$ ـ ك$_1$

أى أن :

$$\frac{س}{\Delta_1} = \frac{ل - س}{\Delta_2}$$ (بضرب الطرفين فى الوسطين)

$\therefore$ س Δ_2 = (ل ـ س) Δ_1

س Δ_2 = ل Δ_1 ـ س Δ_1 ومنه نستنتج أن

س Δ_2 + س Δ_1 = ل Δ_1

س(Δ_2 + Δ_1) = ل Δ_1

حيث س (وهو الجزء الذى يقع (أو المسافة) من الحد الأدنى للفئة المنوالية حتى قيمة المنوال) .

$$\therefore س = \left(\frac{\Delta_1}{\Delta_2 + \Delta_1} \times ل \right)$$

وحيث أن المنوال (م) = الحد الأدنى للفئة المنوالية + س .

٣ ـ $\therefore$ يمكن إستنتاج المنوال (م) من الصيغة الرياضية التالية .

= الحد الأدنى للفئة المنوالية + [($\dfrac{\text{الفرق الأول (ك٢ ـ ك١)}}{\text{الفرق الثانى + الفرق الأول} \quad \text{(ك٢ - ك٣) + (ك٢ - ك١)}}$ × طول الفئة المنوالية)]

أى المنوال (م) = الحد الأدنى للفئة المنوالية + ($\frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2}$ × ل)

وعليه فالمنوال فى مثالنا السابق :

$$= ١٣٧ + (\frac{٤}{٣ + ٤} \times ٦)$$

$$= ١٣٧ + \frac{٢٤}{٧}$$

$$= ١٣٧ + ٣,٤٣$$

= ١٤٠,٤٣ سم

ثانياً : الجداول التكرارية غير المنتظمة (غير متساوية الفئات) .

مثـال (٦) التوزيع التكرارى التالى يمثل الأجور لعينة مكونه من ٢٠٠ عامل بأحد معامل الأدوية بالجنية .

فئات الأجر(ف)	١٠-	٢٠-	٢٥-	٣٥-	٤٠- ٥٠	المجموع
عدد العمال(ك)	٥٠	٢٠	٨٠	٣٠	٢٠	٢٠٠

المطلوب : تحديد منوال الأجر بطريقة الفروق (بيرسون) .

الحـــل :

حيث أن فئـات الأجر غير منتظمة أى أن طول الفئة (ل) ليس ثابتاً كما هو الحال فى المثال السابق رقـم (٥) .

فإننا قبل تطبيق الخطوات السابقة فى الجداول المنتظمه للحصول على المنوال ، نجرى تعديلا على التكرارات الأصلية بحيث نصل إلى التكرارات المعدلة لنفس الفئات ، وقد تم تفصيل ذلك عند دراستنا للمدرج التكرارى فى الفصول السابقه .

حيث أن :

$$\text{التكرار المعدل} = \frac{\text{التكرار الأصلى للفئة}}{\text{على طول الفئة}}$$

ثم نجرى حساباتنا على قيم الثلاث فئات بالجدول الجزئى ، والفروق Δ_1 ، Δ_2 على التكرارات المعدلة وليس على التكرارات الأصلية وسنرمز للتكرارات المعدلة هنا بالرمز (كَ) وعليه فإن :

$$\text{كَ} = \frac{\text{ك (للفئة)}}{\text{ل (لنفس الفئة)}}$$

الفئات (ف)	ك	ل	كَ	
١٠ــ	٥٠	١٠	٥	
٢٠ــ	٢٠	٥	٤ ($كَ_1$)	الفئة السابقة } $\Delta_1 = 4$
٢٥ــ	٨٠	١٠	٨ ($كَ_2$)	الفئة المنوالية
٣٥ــ	٣٠	٥	٦ ($كَ_3$)	الفئة اللاحقة } $\Delta_2 = 2$
٤٠ــ ٥٠	٢٠	١٠	٣	
المجموع	٢٠٠			

وبتطبيق الصيغة الرياضية السابقة للحصول على المنوال بطريقة الفروق حيث Δ_1 = $كَ_2$ ــ $كَ_1$ ، Δ_2 = $كَ_2$ ــ $كَ_3$

$$\therefore \text{المنوال (م) للأجر} = ٢٥ + \left(\frac{٤}{٢ + ٤} \times ١٠ \right)$$

$$= ٢٥ + \frac{٤٠}{٦}$$

= ٢٥ + ٦,٦٧ = ٣١,٦٧ جنيهاً .

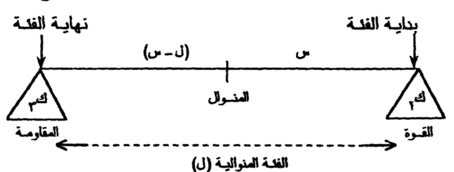
الطريقة الثانيــة : طريقــة الرافــعـة

وبمقتضى هذه الطريقة، نمثل الفئة المنوالية ولتكن (ل) والتى تقع أمام أكبر تكرار برافعة تعمل عند طرفيها قوتان أولهما عند تكرار الفئة السابق للفئة المنواليــة ولتكن ($ك_1$) وتعـمل عند بداية الفـئـة المنواليـة (ويطلق عليـهـا القوة) ،وثانيهما عند التكرار اللاحق للفئة المنوالية ولتكن ($ك_2$) وتعمل عند نهاية الفئة المنوالية (ويطلق عليها المقاومة) .

ويفرض أن القوة والمقاومه المؤثرتين عند طرفى هذه الرافعة يعادلان كلاً من ($ك_1$) ، ($ك_2$) السابقتين .

ويفرض أن نقطة الارتكاز التى تتوازن عندها الرافعة تبعد بمسافه قدرها (س) عن ($ك_1$) ، كما تبعد بمسافة قدرها (ل ــ س) عن ($ك_2$) .

وحيث أن هذه الرافعـة فى حالـة توازن وطبقاً لقـانون الروافع فـإن :



القوة × زراعها = المقاومـة × زراعهـــا

$\therefore$ ك$_1$ × س = ك$_2$ × (ل ــ س)

$\therefore$ ك$_1$ س = ك$_2$ ل ــ ك$_2$س ومنها نستنتج

ك$_1$س + ك$_2$س = ك$_2$ ل

س (ك$_1$ + ك$_2$) = ك$_2$ل

$$\therefore \text{س} = \frac{\text{ك}_٢}{\text{ك}_١ + \text{ك}_٢} \times \text{ل}$$

∴ المنوال : الحد الأدنى للفئة المتوالية + س

$$\therefore \text{المنوال (م)} = \text{الحد الأدنى للفئة المنوالية} + \left(\frac{\text{ك}_٢}{\text{ك}_٢ + \text{ك}_١} \times \text{ل} \right)$$

$$\text{أى أن (م)} = \text{الحد الأدنى للفئة المنوالية} + \left(\frac{\text{المقاومة}}{\text{المقاومة + القوة}} \times \text{طول الفئه المنواليه} \right)$$

مثـــال (٧) :

حل المثال رقم (٥) السابق بطريقة الرافعة :

حيث أن ل = ١٤٣ ــ ١٣٧ = ٦

، $\text{ك}_١$ = ١١ (القوة) ، $\text{ك}_٢$ = ١٢ (المقاومة)

الحـــــل :



القوة × زراعها = المقاومـة × زراعها

١١ × س = ١٢ (٦ ــ س)

١١ س = ٧٢ ــ ١٢ س ومنها نستنتج

٢٣ س = ٧٢

$$\therefore \text{س} = \frac{٧٢}{٢٣} = ٣,١٣$$

$$\text{أو بطريقة أخرى س} = \left(\frac{١٢}{١١+١٢} \times ٦ \right) = ٣,١٣$$

∴ المنوال (م) = ١٣٧ + ٣,١٣ = ١٤٠,١٣ سم

وبالطبع قيمة المنوال بهذه الطريقة يختلف عن قيمته بطريقة الفروق السابقة والبالغ قيمتها ١٤٠,٤٣ سم (لإختلاف الصيغة الرياضية فى كل منهما عن الأخرى) .

مثـــال (٨) :

حل المثال رقم (٦) السابق بطريقة الرافعة

الحـــل :

٢٥   س   (١٠ - س)   ٣٥

٤   المنـوال   ٦

∴ ٤ × س = ٦ (١٠ - س)

٤ س = ٦٠ - ٦ س

١٠ س = ٦٠

ومنها ١٠ س = $\frac{٦٠}{١٠}$ = ٦

حيث ل = (٣٥ - ٢٥) = ١٠

، ك$_{١}$ = ٤ ، ك$_{٢}$ = ٦

أو بطريقة أخرى س = ($\frac{٦}{٦}$ × ١٠) = $\frac{٦}{١٠}$ × ١٠ = ٦

∴ المنوال (م) = ٢٥ + ٦

= ٣١ جنيهاً

الطريقة الثالثـة : طريقة الرسم البيانى :

(أ) طريقة المدرج التكرارى :

١ ــ وبمقتضاها نأخذ فئـات الجدول الجزئى (أى الفئـة المنواليـة والفئـة السابقة لها والفئـة اللاحقـة لها) ونمثلهم بيانياً فى صورة مدرج تكرارى (كما سبق أن أوضحنـا فى الفصل الثالث) . ويتم ذلك من التكرارات الأصليـة (اذا كانت الفئـات متساوية الطول) أو من التكرارات المعدلة (اذا كانت الفئـات غير متساويـة الطول) .

٢ ـ نصل نهاية الحد الأعلى للفئه السابقه مع الحد الأعلى للفئه المنوالية (من أعلا المدرجات التكرارية) بمستقيم وليكن (أ جـ) .

٣ ـ نصل الحد الأدنى للفئة المنوالية مع الحد الأدنى للفئة اللاحقة لها من أعلى المدرجات التكرارية) بمستقيم وليكن (ب د) .

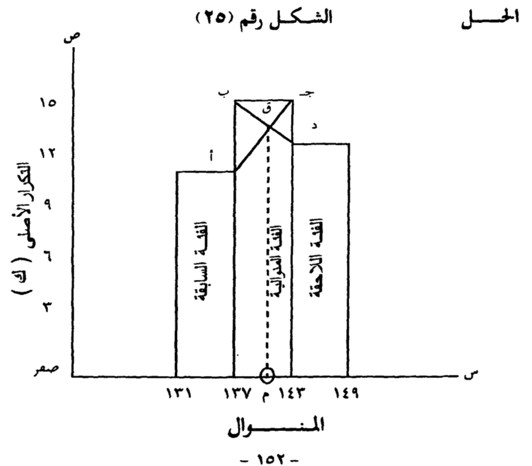
٤ ـ نجد أن المستقيمين (أ جـ) ، (ب د) السابقين يتقاطعان فى نقطة ولتكن (ق) .

٥ ـ نسقط من النقطة (ق) عمود على المحور الأفقى (س) ليقابله فى نقطة ولتكن (م) تكون هى قيمة المنوال المطلوب :

مثـــــال (٩) .

حـل المثـال رقم (٥) السابق بطريقة المدرج التكرارى :

الحـــــل **الشـكـل رقم (٢٥)**

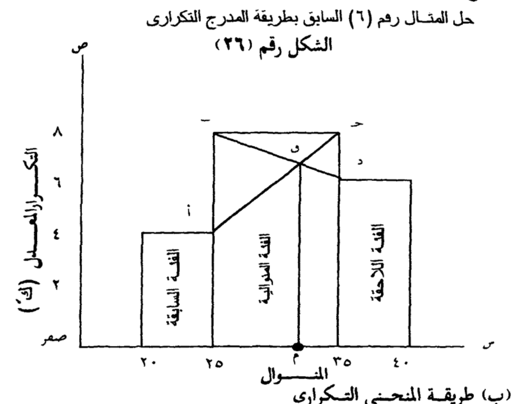




مثـــال (١٠)

حل المثـال رقم (٦) السابق بطريقة المدرج التكرارى

الشكل رقم (٢٦)



(ب) طريقـة المنحـنى التـكرارى

١ ـ وبمقـتـضاها يتم تمثيل التـوزيع التكرارى الأصلى ـ فى الجـداول التكراريـة المنتظمـة ـ بمنحنى تكرارى كما جاء بالفصل الثالث .

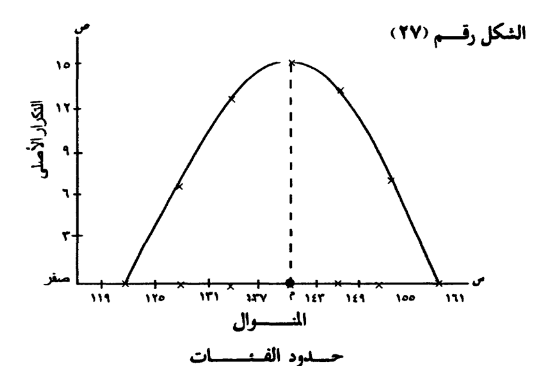
٢ ـ تسـقط عـمـود من أعلى نقطة على المنـحنى (أى من قـمـة هذا المنحنى) عـمـود ياعلى المحـور الأفـقى (س) ليـقـابله عند نقطة ولتكن (م) ستكون هذه النقطة هى قيمة المنوال من الرسم .

مثـــال (١١) أوجد المنوال فى المثال رقم (٥)السابق بطريقة المنحنى التكرارى .

الحـــل :

١ ـ نقوم بمثيل بيانات هـذا التـوزيع بيانيـاً فى صورة منحنى تكرارى ثم نسقـط عمـود من أعلى قمـة المنحنى ليقـابل المحـور السينى فى (م) هى المنوال = ١٤٠,٥ (تتوقف دقة قيمة المنوال هنا على دقة الرسم البيانى كما فى الشكل التالى) .

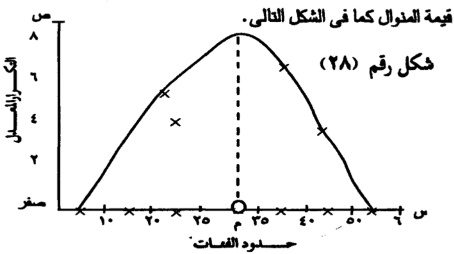
الشكل رقم (٢٧)



مثال رقم (١٢) أوجد المنوال بطريقة المنحنى التكرارى فى المثال رقم (٦) السابق.

الحل:

هذا الجدول غير منتظم فلابد من تعديل التكرارات الأصلية إلى تكرارات معدلة ، ثم تمثيل التكرارات المعدلة فى صورة منحنى تكرارى ، نسقط من أعلى نقطة فيه عمودى على المحور (س) ليقابله في نقطة ولتكن (م) هى قيمة المنوال كما فى الشكل التالى.



شكل رقم (٢٨)

بعض خصائص المنـــوال

١ ـ إذا تم ضرب قيمة المنوال فى عدد مفردات الظاهرة موضوع القياس، فلا يعطى ناتج ما سبق المجموع الأصلى للتوزيع كما هو الحال فى الوسط الحسابى .

٢ – المنوال لا يمثل القيمة الوسطى فى التو زيع كما هو الحال فى الوسيط كما أنه فى بعض الظواهر أو الحالات قد لا تجد لها منوال.

٣ ـ إن طريقة حسابـة تعتبر من أبسط طرق حساب مقـاييس النزعة المركزيـة ، كما أنـه يستخدم لحساب المتوسط فى حـالات التوزيعات الكميـة ، والوصفيـة سواء أكانت ترتيبيـة أو غير ترتيبيـة على حد سواء ويفضل استخدامه إذا كان التوزيع فى صورة نسبة .

٤ – لا تدخل كل مفردات التوزيع للظاهرة المقيسة عند حساب قيمتـه، كما هو الحال فى الوسط الحسابىلذا لا يتأثرالمنوال بالقيم الشاذة أو المتطرفة كما هو الحال فى الوسط الحسابى.

٥ ـ يمكن حساب قيمتـه من الجداول التكراريـة المفتوحـة كما هو الحال فى الوسيط بعكس الوسط الحسابى .

٦ ـ تتأثر قيمـة المنوال بحجم العينـة ، وتتأثر كذلك بطول فئـة التوزيع التكرارى وبطريقة الترتيب ، لكل ما سبق يعتبر المنوال ، مقياس غير ثابت اذا ما أعيد ترتيب مفردات التوزيع كما يتغير قيمـة المنوال إذا ما أعيد تعديل حدود الفئـات ، حيث تنتقل القيمة المقدرة للمنوال إلى حدود فئـة أخرى مخالفة لحدود الفئـة المنواليـة قبل إحداث التعديل .

٧ ـ قيمـة المنــوال تختلف باختـلاف طريقة حسابـة ، بعكس الوسيط والوسط الحسابى .

٨ ـ إذا كان المنحنى التكرارى متعدد القمم ، فهذا يعنى أن للتوزيع أكثر من منوال واحد ، وأن كـان المنوال فى مـثل هذه الظروف لايكون ذات فـائدة كبيره من حيث تمثيل التوزيع ، لأن التوزيع فى مثل هذه الحاله يكون غير متجانس .

المبحث الرابع

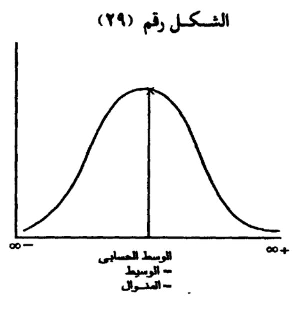
العلاقة بين المتوسطات الثلاثة السابقة

مقدمة : تعرضنا فى الفصل الثالث فيما سبق إلى أنواع المنحنيات التكرارية حيث أنها تتوقف على التوزيع التكرارى ، فإذا كان التوزيع التكرارى متماثلاً فيمكن تمثيله بمنحنى متماثل ، أو معتدلاً يشبه الناقوس ، وله محور رأسي يمر بنقطة النهاية العظمى للتوزيع ويقسمه إلى جزئين متطابقين تماماً.

أما إذا كان التوزيع غير متماثل ، فالمنحنى الممثل له يكون غير معتدل ، ويطلق عليه منحنى ملتوى، وقد يكون الالتواء إلى اليمين أو الالتواء إلى اليسار كما فى الشكل رقم (١٦) السابق ونود أن نربط فى هذا الجزء بين شكل التوزيع التكرارى ومقاييس النزعة المركزيه الثلاثة (الوسط الحسابى، الوسيط ، المنوال).

أولاً : اذا كان التوزيع التكرارى متماثلاً فإن الأوساط الثلاثه تكون متطابقة ، أى أن قيمة الوسط الحسابى = قيمة الوسيط = قيمة المنوال كما فى الشكل التالى :

الشكل رقم (٢٩)



وبمقتضى هذه العلاقة يمكن إستنتاج المنوال بمعلومية الوسيط والوسط الحسابى أو العكس أى ممكن استنتاج أى منهما بمعلومية الآخرين.

ثانياً : اذا كان التوزيع قريباً جداً من التماثل (أى ملتوياً لكن الالتواء بسيط)، فإنه تكون هناك صيغة تقريبية للعلاقة بين قيم المتوسطات الثلاثة حددها كارل بيرسون كمايلى :

(أ) الوسط الحسابى ـ المنـــوال = ٣ (الوسط الحسابى ـ الوسيط) أى أن :

$\bar{س} - م = ٣ (\bar{س} - ر_{م})$ ومنها نستنتج . (العلاقة الاساسية)

$\bar{س} - م = ٣ \bar{س} - ٣ ر_{م}$

$\therefore ٣ ر_{م} - م = ٣ \bar{س} - \bar{س}$

$= ٢ \bar{س}$ ومنها نستنتج بعد قسمة الطرفين على (٢) أن :

$\therefore \bar{س} = \frac{٣}{٢} ر_{م} - \frac{١}{٢} م$ .... (١)

أى أن الوسط الحسابى = $\frac{٣}{٢}$ الوسيط ـ $\frac{١}{٢}$ المنوال .

ويمكن إستخدام العلاقة السابقة فى إستنتاج قيمة تقريبية للوسط الحسابى من جدول تكرارى مفتوح بمعلومية كل من الوسيط والمنـــوال اللذان يمكن حساب قيمتهما من الجداول المفتوحة.

وأيضاً يمكن من العلاقة الأساسية السابقة استنتاج.

$٣ ر_{م} = (٣ \bar{س} - \bar{س}) + م$

$٣ ر_{م} = ٢ \bar{س} +$.قسمة الطرفين على (٣) :

$\therefore ر_{م} = \frac{٢}{٣} \bar{س} + \frac{١}{٣} م$ .... (٢)

أى أن الوسيط = $\frac{٢}{٣}$ الوسط الحسابى + $\frac{١}{٣}$ المنوال : يمكن إستنتاج بمقتضى هذه العلاقة الوسيط بمعلومية الوسط الحسابى، المنوال .

وأيضاً يمكن استنتاج أن المنوال (م) = ٣ $ر_{م}$ - ٢ $\bar{س}$ .... (٣).

أى أن المنوال = ٣ أمثال الوسيط ـ ضعف الوسط الحسابى

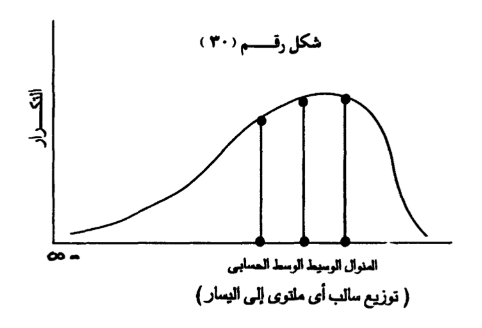
ثالثاً : إذا كان التوزيع غير متماثل أى المنحنى ملتوياً فإن :

الأوساط الثلاثة تكون غير متطابقة ، ذلك أن الوسط الحسابى والوسيط ينحازان إلى الطرف الملتوى من التوزيع ، كما أن الوسط الحسابى يكون أكثر إنحيازاً من الوسيط فى مثل هذا التوزيع أى أنه:

(أ) فى حالة التوزيع الملتوى إلى اليسار (سالب الألتواء) يكون الوضع النسبى للمتوسطات :

الوسط الحسابى < الوسيط < المنـوال

ويتضح ما تقدم من الشكل التالى :



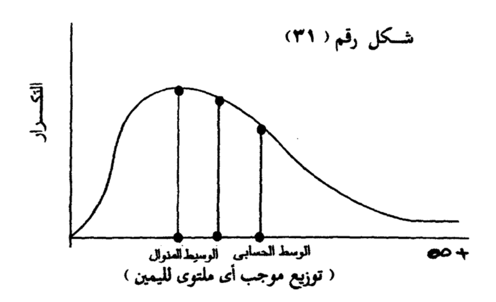
(توزيع سالب أى ملتوى إلى اليسار)

(ب) فى حالة التوزيع الملتوى إلى اليمين (موجب الالتواء) يكون الوضع النسبى للمتوسطات :

الوسط الحسابى > الوسيط > المنـوال

ويتضح ماتقدم من الشكل التالى :

شـكل رقم (٣١)



(توزيع موجب أى ملتوى لليمين)

ونود أن نشير هنا فى مجال التوزيعات الملتويه للملاحظات التاليـة :

١ ـ أن الوسيط يقع دائماً بين الوسط الحسابى والمنوال .

٢ ـ أن الوسط الحسابى يقع دائماً ناحيـة الطرف الأكبر للتوزيع وهذا يتفق مع المنطق ، لأن الوسط الحسابى يتأثر بالقيم المتطرفـة ، والقيم المتطرفة توجد غالباً عند الطرف الأكبر للتوزيع.

٣ ـ يحسن استـخدام الوسيط بدلا من الوسط الحسابى فى التوزيعات التكراريـة الملتويـة ، التواءاً ملموسـاً ، ذلك لأن الوسيط لا يتأثر بالقيم المتطرفـة عند حساب قيمته ، فمتوسط الدخل مثلاً يكون توزيعـه دائماً ملتوياً ناحيـة اليمين ، لذا فـإنـه فى توزيعات الدخل يكون الوسيط تقديـراً جيداً لمتوسط الدخل .

٤ ـ تُعطى طرق تقدير المنوال نتـائج تقريبيـة واستـخدامـه فى الحـياة العمليـة نادراً ، لذا لاينصح بإستخدامه إلا فى حالة المتغيرات الوصفيـة .

المبحث الخامس

الوسط الهندسى

Geometric Mean

أولاً . مقدمة :

يعتبر الوسط الهندسى من مقاييس المتوسطات - النزعه المركزيه - الثانوية، حيث يفضل إستخدامة فى حساب متوسط معدل النمو للمتغيرات المختلفه سواء أكانت لقيم متزايده أو لقيم متناقصه ، لذا فهو شائع الإستخدام عند حساب متوسط النسب - المنسوب - فى الأرقام القياسية (*) وسنرمز له بالرمز (هـ) .

ثانياً : الوسط الهندسى لبيانات غير مبوبه (مفرده) :

إذا أخذت ظاهرة أو متغير ما القيم $س_1$ ، $س_2$ ، $س_3$ ، .... ، $س_ن$ ، فإن الوسط الهندسى هنا عباره عن الجذر النونى لحاصل ضرب القيم السابقة التى عددها (ن) . أى أن .

$$\text{الوسط الهندسى (هـ)} = \sqrt[ن]{س_1 \times س_2 \times س_3 \times \ldots\ldots \times س_ن}$$

وبالطبع يستخدم أسلوب اللوغاريتمات (لو للأساس ١٠) للحصول على الوسط الهندسى (هـ) كما يلى :

أولا .

$$\text{لو (هـ)} = \frac{1}{ن} (\text{لو } س_1 + \text{لو } س_2 + \text{لو } س_3 + \ldots\ldots + \text{لو } س_ن)$$

$$= \frac{1}{ن} \text{ مجـ لو س}$$

ثانيا :

ثم نوجد الوسط الهندسى (هـ) بإستخدام جداول الأعداد المقابله للوغارتيمات ... ... (٢)

(*) سيتضح لنا ذلك عند دراسه الارقام القياسية .

أى أنه للحصول على الوسط الهندسى فى الحاله السابقة سنتبع الخطوات التاليه :

- نحسب لوغاريتمات القيم (لوس)،ثم بجمعها نحصل على (مجـ لوس) .

- بقسمة حاصل الجمع السابق (مجـ لو س) على عدد مفردات الظاهرة (ن) فنحصل على (لو هـ)

- بالكشف فى جدول الأعداد المقابله للوغاريتمات ، نحصل على الوسط الهندسى (هـ) .

ويتضح ما تقدم من الأمثله التاليه :

مثـال (١) :

أوجد الوسط الهندسى لعينه مكونه من (١٠طلاب) فى مادة الرياضيات إذا كانت درجاتهم كما يلى (x) .

٢٥ ، ٦٠ ، ٨٥ ، ٩٠ ، ٥٥ ، ٤٥ ، ٥٥ ، ٧٥ ، ١٠ ، ١٠٠

الحـل :

الوسط الهندسى (هـ)

$$= \sqrt[١٠]{٢٥ \times ٦٠ \times ٨٥ \times ٩٠ \times ٥٥ \times ٤٥ \times ٥٥ \times ٧٥ \times ١٠ \times ١٠٠}$$

$$(١)\ لو\,(هـ) = \frac{١}{١٠}\ (\,لو_{٢٥} + لو_{٦٠} + لو_{٨٥} + لو_{٩٠} + لو_{٥٥}$$

$$+ لو_{٤٥} + لو_{٥٥} + لو_{٧٥} + لو_{١٠} + لو_{١٠٠}\,)$$

ومن الجـدول التـالى نـحـصل على (مـجـ لو س) باسـتـخـدام جـدول اللوغارتمات للأساس (١٠) : (xx) .

س	لو س	س	لو س
٢٥	١,٣٩٧٩	٥٥	١,٧٤٠٧
٦٠	١,٧٧٨٢	٧٥	١,٨٧٥١
٨٥	١,٩٢٩٤	١٠	١,٠٠٠٠
٩٠	١,٩٥٤٢	١٠٠	٢,٠٠٠٠
٥٥	١,٧٤٠٤		
٤٥	١,٦٥٣٢		
(*) مثال (١) صـ ٩٥ ، كوسط حسابى .		المجموع (مجـ لوس)	١٧,٠٦٩١

(٢) بالقسمة على (ن) حيث ن = ١٠

$$\text{أى لو هـ} = \frac{\text{مجـ لو س}}{\text{ن}} = \frac{١٧,٠٦٩١}{١٠} = ١,٧٠٦٩١$$

بالكشف فى جدول الأعداد المقابله للوغاريتمات عن ٠,٧٠٦٩١ أمام ٠,٧٠ تحت (٦) فروق (٩) فنجدها كالآتى:

٠,٧٠٦٩ = ٥٠٨٢
+
فرق (٩) = ١١
٥٠٩٣

(٣) من النتيجه فى (٢) نحرك العلامة العشرية جهة اليمين لاعداد صحيحة تزيد (١) عن الاعداد الصحيحه فى لوهـ اى فى مثالنا للعددين صحيحين .

أى يصبح هـ (الوسط الهندسى) = ٥٠,٩٣ درجة

(وهو يختلف عن الوسط الحسابى والذى بلغ ٦٠ درجة) فيما سبق

مثال (٢) :

أوجد الوسط الهندسى للنسب التالية

١٠٥,٢٪ ، ١١٠,٣٪ ، ١٢٠,٤٪ ، ١٣٠,٥٪

الحـــل :

$$\therefore \text{هـ} = \sqrt[\text{ن}]{\text{س}_١ \times \text{س}_٢ \times \text{س}_٣ \times \text{س}_٤}$$

$$= \sqrt[٤]{١٠٥,٢ \times ١١٠,٣ \times ١٢٠,٤ \times ١٣٠,٥}$$

(**) حيث أن العدد الصحيح يقل واحد عن الأعداد الصحيحه فى (س) أما الكسر فيتم الحصول عليه من جدول اللوغاريتمات .

$$\text{لو هـ} = \frac{1}{4}(\text{لو}_{105,2} + \text{لو}_{110,3} + \text{لو}_{120,4} + \text{لو}_{130,5})$$

$$= \frac{1}{4}(2,0220 + 2,0425 + 2,0806 + 2,1152)$$

$$= \frac{8,2603}{4}$$

= ٢,٠٦٥٠١ بالكشف فى جدول الاعداد المقابله للوغاريتمات

∴ هـ (الوسط الهندسى) = ١١٦,١ ٪

ثالثاً : الوسط الهندسى لبيانات مبوبه (فى صورة جداول تكرارية)

بفرض أن مراكز الفئات هى $س_1$ ، $س_2$ ، $س_3$ ، ..... ، $س_ن$

والتكرارات المقابله لها هى $ك_1$ ، $ك_2$ ، $ك_3$ ، .... ، $ك_ن$

بالترتيب فإن :

$$\text{الوسط الهندسى (هـ)} = \sqrt[\text{مجـ ك}]{(س_1)^{ك_1} \times (س_2)^{ك_2} + (س_3)^{ك_3} \times \ldots \times (س_ن)^{ك_ن}}$$

$$\text{لو هـ} = \frac{1}{\text{مجـ ك}}(ك_1 \text{ لوس}_1 + ك_2 \text{ لوس}_2 + ك_3 \text{ لوس}_3 + \ldots + ك_ن \text{ لوس}_ن)$$

$$\text{لو هـ} = \frac{\text{مجـ ك لو س}}{\text{مجـ ك}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

ثم نوجد الوسط الهندسى (هـ) بإستخدام جداول الأعداد المقابلة للوغاريتمات .

وتتلخص خطوات الحصول على الوسط الهندسى هنا كما يلى :

١ - حساب مراكز الفئات (س) ثم لوغاريتماتها .

٢ ـ ضرب كل تكرار فى (لو س) المناظره فنحصل على (ك لوس).
٣ ـ بجمع العمود (ك لو س) فنحصل على (محـ ك لو س) .
٤ ـ بقسمة المجموع فى (٣) على (محـ ك) نحصل على (لو هـ) .
٥ ـ بإستخدام جدول الأعداد المقابله للوغاريتمات فنحصل على (هـ) .

مثال ٣ :

أوجد الوسط الهندسى لأطوال عينة من التلاميذ من الجدول التكرارى التالى :

فئات الطول (ف)	١٢٥ـ	١٣١ـ	١٣٧ـ	١٤٣ـ	١٤٩ـ١٥٥	المجموع
عدد التلاميذ (ك)	٦	١١	١٥	١٢	٦	٥٠

الحـــل :

ف	ك	س	لو س	ك لو س
١٢٥ـ	٦	١٢٨	٢,١٠٧٢	١٢,٦٤٣٢
١٣١ـ	١١	١٣٤	٢,١٢٧١	٢٣,٣٩٨١
١٣٧ـ	١٥	١٤٠	٢,١٤٦١	٣٢,١٩١٥
١٤٣ـ	١٢	١٤٦	٢,١٦٤٤	٢٥,٩٧٢٨
١٤٩ـ١٥٥	٦	١٥٢	٢,١٨١٨	٢٣,٠٩٠٨
المجموع	٥٠			١٠٧,٢٩٦٤

$$\because \text{لو هـ} = \frac{\text{محـ ك لو س}}{\text{محـ ك}}$$

$$\therefore \text{لو هـ} = \frac{١٠٧,٢٩٦٤}{٥٠} = ٢,١٤٥٩$$

بالكشف فى جدول الاعداد المقابله للوغاريتمات

∴ هـ = ١٣٩,٦ سم

(ملحوظة : كان الوسط الحسابى ١٤٠,١٢ سم لنفس التوزيع ص ١١٤ من هذا الفصل) .

نلخص من المثالين (١) ، (٣) السابقين أن قيمه الوسط الهندسى تختلف عن قيمة الوسط الحسابى لنفس الظاهرة ، ومما تجدر الإشارة إليه أن الوسط الحسابى أكثر تأثراً بالقيم الشاذه (المتطرفه) عنه فى الوسط الهندسى ، وقد وضح ذلك جليا من المثال رقم (١) السابق .

رابعاً : الوسط الهندسى المرجح :

إذا أخذت ظاهرة ما القيم ($س_١$ ، $س_٢$ ، $س_٣$ ، ...... ، $س_ن$) ورغبنا فى أيجاد الوسط الهندسى لها بعد ترجيحها بالأوزان ($و_١$ ، $و_٢$ ، $و_٣$ ، .... ، $و_ن$) على الترتيب ، فإن حساب الوسط الهندسى فى هذه الحالة لايختلف عن حالة الوسط الهندسى من بيانات مبوبه ، حيث أن الأوزان الترجيحيه هنا ($و_١$ ، $و_٢$ ، $و_٣$ ، ... ، $و_ن$) تناظر تماما التكرارات ($ك_١$ ، $ك_٢$ ، $ك_٣$ ، .... ، $ك_ن$) فى حالة البيانات المبوبة .

حيث :

$$هـ = \sqrt[مجـ و]{(س_١)^{و_١} \times (س_٢)^{و_٢} \times (س_٣)^{و_٣} \times ..... \times (س_ن)^{و_ن}} \quad .... (٣)$$

مثال ٤ :

الجدول التالى يمثل أسعار (٥ سلع ، الكميات المشتراه منها) :

نوع السلعه	أ	ب	حـ	د	هـ
الكميه المشتراه (و)	٢	٦	٤	١٢	١٠
سعر السلعه (س)	٥٠	٣٠	٢٠	١٠	٣٠

والمطلوب

حساب الوسط الهندسى للاسعار مرجحا بالكميات المشتراه للسلع المشار إليها :

الحـــل

$$هـ = \sqrt[34]{(50)^{2} \times (30)^{6} \times (20)^{4} \times (10)^{12} \times (30)^{10}}$$

$$لو\ هـ = \frac{1}{34}\left(2\ لو_{50} + 6\ لو_{30} + 40\ لو_{20} + 12\ لو_{10} + 10\ لو_{30} \right)$$

السلع	الاسعار (س)	الكميات المشتراه (و)	لو س	و لو س
أ	٥٠	٢	١,٦٩٩٠	٣,٣٩٨٠
ب	٣٠	٦	١,٤٧٧١	٨,٨٦٢٦
حـ	٢٠	٤	١,٣٠١٠	٥,٢٠٤٠
د	١٠	١٢	١,٠٠٠	١٢,٠٠٠٠
هـ	٣٠	١٠	١,٤٧٧١	١٤,٧٧١٠
المجموع		٣٤		٤٤,٢٣٥٦

$$وحيث\ أن\ لو\ هـ = \frac{مجـ\ و\ لو\ س}{مجـ\ و} \ldots (3)$$

$$\therefore لو\ هـ = \frac{44,2356}{34} = 1,3010$$

بالكشف فى جدول الاعداد المقابلة للوغارتيمات

∴ هـ (الوسط الهندسى المرجح للأسعار) = -,٢٠ جنيهاً.

خامساً : خصائص الوسط الهندسى :

١ ـ الوسط الهندسى مقياس للقيمه مثل الوسط الحسابى وليس مقياس

للموضع كما هو الحال فى الوسيط والمنوال، كما يدخل فى حساب قيمته كل مفردات التوزيع بما فيها المفردات الشاذه أو المتطرفه ، لكن تأثره بالمفردات الشاذه أقل من تأثر الوسط الحسابى لنفس المفردات.

٢ ـ يتعذر حساب الوسط الهندسى إذا كانت إحدى قيم المتغير (س) = صفر .

٣ ـ يتعذر حساب الوسط الهندسى إذا كانت إحدى قيم المتغير (س) قيمه سالبه .

٤ ـ دائما قيمه الوسط الهندسى لأى ظاهرة أصغر من قيمة الوسط الحسابى لنفس الظاهره (*) . وهذه الخاصيه يمكن إثباتها عندما يزيد عدد المفردات عن (مفردتين) وأيضا فى حاله الجداول التكراريه إذا كان المتغير (س) يأخذ القيمتين الموجبتين $س_١$ ، $س_٢$.

(*) حيث $س_١ \neq س_٢$ فإن

$$\bar{س} = \frac{س_١ + س_٢}{٢}$$

$$هـ = \sqrt{س_١ \times س_٢}$$

$\because$ $س_١$ ، $س_٢$ > صفر :

، $س_١ \neq س_٢$

$\because$ $(\sqrt{س_١} - \sqrt{س_٢})^٢ >$ صفر

$س_١ + س_٢ - ٢\sqrt{س_١ س_٢} >$ صفر

$س_١ + س_٢ > ٢\sqrt{س_١ س_٢}$

$$\therefore \frac{س_١ + س_٢}{٢} > \sqrt{س_١ س_٢}$$

$\therefore$ $\bar{س} >$ هـ

المبحث السادس

الوسط التوافقى

Harmonic Mean

أولاً : مقدمة :

هو مقياس آخر من مقاييس المتوسطات ، يفضل إستخدامه فى حالات خاصة أى عندما يعبر عن المتغيرات فى صورة معدلات زمنيه ، كالمسافه التى تقطعها السيارة أو القطار أو الطائرة فى وحدة الزمن ، أو إنتاج ماكينه فى الساعة مثلا ، وأيضاً متوسطات الأسعار إذا أعطيت بدلالة وحدة النقود ... وهكذا ...

ويمكن تعريف الوسط التوافقى لظاهره أو متغير ما تأخذ القيم $س_١$ ،$س_٢$ ، $س_٣$ ، ..... $س_ن$ ، بأنه عباره عن مقلوب الوسط الحسابى لمقلوبات قيم الظاهرة أو المتغير المشار إليهما . وسنرمز له بالرمز (ق) .

أى أن :

$$\text{الوسط التوافقى (ق)} = \left(\frac{ن}{\frac{1}{س_١} + \frac{1}{س_٢} + \frac{1}{س_٣} + ... + \frac{1}{س_ن}} \right)$$

ثانياً : الوسط التوافقى فى حاله بيانات غير مبوبه (مفرده)

اذا كان لدينا متغير س يأخذ القيم $س_١$، $س_٢$، $س_٣$، ...... ، $س_ن$ فإن :

$$\text{الوسط التوافقى (ق)} = \left(\frac{ن}{مجـ \frac{1}{س}} \right) \quad .... \quad (١)$$

وعليه فخطوات حسابة تتلخص فيما يلى :

ـ إذا رمزنا للقراءات أو للقيم بالرمز (س)

- يتم حساب مقلوب كل قراءة أو قيمة من القيم السابقه أى $\left(\frac{١}{\text{س}} \right)$

- بجمع مقلوبات القيم السابقه نحصل على $\left(\text{مجـ} \frac{١}{\text{س}} \right)$

- وبتطبيق القانون السابق $\text{ق} = \frac{\text{ن}}{\text{مجـ} \left(\frac{١}{\text{س}} \right)}$ نحصل على الوسط التوافقى المطلوب

مثـــال (١) :

أوجد الوسط التوافقى لدرجات عينه مكونه من (١٠طلاب) فى مادة الرياضيات اذا كانت درجاتهم فى هذه المادة كانت كما يلى :

٢٥ ، ٦٠ ، ٨٥ ، ٩٠ ، ٥٥ ، ٤٥ ، ٥٥ ، ٧٥ ، ١٠ ، ١٠٠

الحـــل :

$$\therefore \text{ق} = \left(\frac{\text{ن}}{\frac{١}{\text{س}_١} + \frac{١}{\text{س}_٢} + \frac{١}{\text{س}_٣} + \dots\dots\dots + \frac{١}{\text{س}_\text{ن}}} \right)$$

حيث $\text{س}_١ = ٢٥$ ، $\text{س}_٢ = ٦٠$ ، $\text{س}_٣ = ٨٥$، .... $\text{س}_\text{ن} = ١٠٠$ ، ن = ١٠

فإن :

$$\text{ق} = \frac{١٠}{\frac{١}{٢٥} + \frac{١}{٦٠} + \frac{١}{٨٥} + \frac{١}{٩٠} + \frac{١}{٥٥} + \frac{١}{٤٥} + \frac{١}{٥٥} + \frac{١}{٧٥} + \frac{١}{١٠} + \frac{١}{١٠٠}}$$

$$= \frac{١٠}{,٠٤ + ,٠١٦٧ + ,٠١١٨ + ,٠١١ + ,٠١٨ + ,٠٢٢ + ,٠١٨ + ,٠١٣ + ,٠١ + ,٠٠١}$$

$$= \frac{١٠}{٠,١٦١٥} = ٦١,٩ \text{ درجه}$$

مثال (٢) :

اذا سارت سيارة (١ كيلو متر) بسرعه ٦٠ كم / ساعه

، (١ كيلو متر) ثانى بسرعه ٧٠ كم / ساعه

، (١ كيلو متر) ثالث بسرعه ٨٠ كم / ساعه

فاحسب الوسط التوافقى لسرعة هذه السيارة خلال المسافة المقطوعة :

الحــل :

$$\therefore \text{ق} = \frac{\text{ن}}{\text{مجـ}\left(\frac{١}{\text{س}}\right)}$$

تحسب مجـ $\left(\frac{١}{\text{س}}\right)$ كما يلى :

	س	$\frac{١}{\text{س}}$
(١)	$\text{س}_١$: ٦٠	٠,٠١٦٧
(٢)	$\text{س}_٢$: ٧٠	٠,٠١٤٣
(٣)	$\text{س}_٣$: ٨٠	٠,٠١٢٥

(٤) مجـ $\left(\frac{١}{\text{س}}\right)$ = ٠,٠٤٣٥

وحيث أن ن = ٣ كيلو متر

$$\therefore \text{ق} = \frac{٣}{٠,٠٤٣٥} = ٦٨,٩٧ \text{ كيلو متر / ساعة}$$

ثالثاً الوسط التوافقي في حاله بيانات مبوبه

وهنا يراعى أخذ التكرارات المقابله لكل فئه في الحسبان عند حساب الوسط التوافقي :

فإذا كانت مراكز الفئات لظاهره أو متغير ما مبوبه في صورة جدول تكراري هي $س_1$ ، $س_2$ ، $س_3$ ، .... $س_ن$ والتكرارات المناظره لكل مركز هي $ك_1$ ، $ك_2$ ، $ك_3$ ، .... $ك_ن$ على الترتيب فإن .

$$\text{الوسط التوافقي (ق)} = \frac{\text{مجـ ك}}{\frac{ك_1}{س_1} + \frac{ك_2}{س_2} + \frac{ك_3}{س_3} + \text{........} + \frac{ك_ن}{س_ن}}$$

أي

$$ق = \frac{\text{مجـ ك}}{\text{مجـ} \left(\frac{ك}{س}\right)} \qquad \text{.................} \qquad (2)$$

مثـــال ٣ :

أوجد الوسط التوافقي لأطوال التلاميذ بالمثال رقم (٣) بالوسط الهندسي في المبحث السابق .

الحـــــل :

لايجاد مجـ $\left(\frac{ك}{س}\right)$ ننشئ الجدول التالي :

ف	ك	س	$\frac{ك}{س}$
١٢٥-	٦	١٢٨	٠,٠٤٧٩
١٣١-	١١	١٣٤	٠,٠٨٢١
١٣٧-	١٥	١٤٠	٠,١٠٧١
١٤٣-	١٢	١٤٦	٠,٠٨٢٢
١٤٩-١٥٥	٦	١٥٢	٠,٠٣٩٥
المجموع	٥٠		٠,٣٥٨٨

$$\therefore \quad ق = \frac{٥٠}{٠,٣٥٨٨} = ١٣٩,٣٥ \quad سم$$

رابعاً : الوسط التوافقى المرجح :

إذا أخذت ظاهرة ما القيم ($س_١$ ، $س_٢$ ، $س_٣$ ، .... ، $س_ن$) ورغبتنا إيجاد الوسط التوافقى لها بعد ترجيحها بالأوزان ($و_١$ ، $و_٢$ ، $و_٣$ ، .... ، $و_ن$) على الترتيب فإن حساب الوسط التوافقى فى هذه الحاله لايختلف عن طريقة حسابه فى حاله البيانات المبوبه السابقه حيث أن الأوزان الترجيحيه هنا ($و_١$ ، $و_٢$ ، $و_٣$ ، ...... ، $و_ن$) تناظر تماما التكرارات ($ك_١$ ، $ك_٢$ ، $ك_٣$ ، .... ، $ك_ن$) عليه فإن :

$$ق = \frac{و_١ + و_٢ + و_٣ + ... + و_ن}{\frac{و_١}{س_١} + \frac{و_٢}{س_٢} + \frac{و_٣}{س_٣} + ... + \frac{و_ن}{س_ن}}$$

أى أن :

$$ق = \frac{مجـ و}{مجـ (\frac{و}{س})} \quad .... \quad (٣)$$

مثـال ٤ :

إذا قطع قطار المسافة من الاسكندرية إلى دمنهور بسرعه ١٣٠ كيلو متر/ساعة ، ومن دمنهور إلى طنطا بسرعة ١٠٠ كيلو متر / ساعة ، ومن طنطا إلى بنها بسرعة ٩٠ كيلو متر/ ساعة ومن بنها إلى القاهرة بسرعة ١٢٠ كيلو متر / ساعة، وكانت المسافة من الاسكندرية إلى دمنهور تساوى ٦٠ كيلو متر

والمسافة من دمنهور إلى طنطا تساوى ٥٠ كيلو متر

والمسافة من طنطا إلى بنها تساوى ٤٥ كيلو متر

والمسافة من بنها إلى القاهرة تساوى ٥٥ كيلو متر

فاحسب الوسط التوافقى لسرعة القطار من الاسكندرية إلى القاهرة .

الحـــل :

$$\therefore ق = \frac{مج و}{مج \left(\frac{و}{س} \right)}$$

لايجاد مج ($\frac{و}{س}$) ننشئ الجدول التالى

س	و	$\frac{و}{س}$
١٣٠	٦٠	٠,٤٦١٥
١٠٠	٥٠	٠,٥٠٠٠
٩٠	٤٥	٠,٥٠٠٠
١٢٠	٥٥	٠,٤٥٨٣
المجموع	٢١٠	١,٩١٩٨

$$\therefore ق \text{ (الوسط التوافقى المرجح) } = \frac{٢١٠}{١,٩١٩٨} = ١٠٩,٣٩ \text{ كيلو متر/ساعه}$$

خامساً : **خصائص الوسط التوافقى :**

١ ـ الوسط التوافقى مقياس للقيمة مثل الوسط الحسابى وليس مقياس للموضع كما هو الحال فى الوسيط والمنوال، وعليه فتدخل فى حساب قيمته كل مفردات التوزيع بما فيها المفردات الشاذه أو المتطرفه ، لذا تؤثر جميع القيم فى حساب قيمته لكنه لا يتأثر بالقيم الشاذه كما هو الحال فى الوسط الحسابى .

٢ ـ يتعذر حساب قيمته اذا كانت إحدى مفردات المتغير (س) تساوى الصفر (فى حاله بيانات غير مبوبه) أو كان أحد مراكز الفئات يساوى الصفر (فى حالة البيانات المبوبة) .

٣ ـ يفضل إستخدام الوسط التوافقى عن باقى المتوسطات الأخرى فى حالات حساب متوسطات معدلات السرعه بالنسبه للزمن أو معدلات التغير فى الإنتاج ببعض المصانع والآلات أو متوسط الأسعار إذا أعطيت بدلاله وحدة النقود.

٤ ـ الوسط التوافقى دائما أصغر من الوسط الهندسى والوسط الهندسى دائما أصغر من الوسط الحسابى أى أن :

الوسط الحسابى > الوسط الهندسى > الوسط التوافقى

أى :

$$(\bar{\text{س}} > \text{هـ} > \text{ق})$$ (*)

(*) سبق إثبات أن س › هـ عند دراسة الوسط الهندسى وعليه ينبغى إثبات أن هـ › ق .

فإذا كان لدينا المتغير (س) يأخذ القيمتين الموجبتين س_1 ، س_2، حيث $\text{س}_1 \neq \text{س}_2$ فإن

س > هـ أى أن

$$\frac{\text{س}_1 + \text{س}_2}{2} > \sqrt{\text{س}_1 \, \text{س}_2}$$ بضرب الطرفين فى $\frac{2\sqrt{\text{س}_1 \, \text{س}_2}}{\text{س}_1 + \text{س}_2}$ نجد أن

$$\sqrt{\text{س}_1 \text{س}_2} > \frac{2 \, \text{س}_1 \text{س}_2}{\text{س}_1 + \text{س}_2}$$

$$\therefore \text{هـ} > \frac{2 \, \text{س}_1 \text{س}_2}{\text{س}_1 + \text{س}_2}$$

$$\text{هـ} > \frac{2 \, \text{س}_1 \text{س}_2}{\text{س}_1 + \text{س}_2} \times \frac{\frac{1}{\text{س}_1 \text{س}_2}}{\frac{1}{\text{س}_1 \text{س}_2}}$$

$$\text{هـ} > \frac{2}{\frac{1}{\text{س}_1} + \frac{1}{\text{س}_2}}$$

$$\therefore \text{هـ} > \text{ق}$$

وتأكيد لذلك أنظر حل المثال رقم (٧) في الوسط الحسابي وهو نفسه المثال رقم (٣) بالوسط الهندسي ، وهو نفسه المثال رقم (٣) بالوسط التوافقي من هذا الفصل حيث كان متوسط الطول للتلميذ في هذه العينة كما يلي على الترتيب:

سَ = ١٤٠,١٢ سم

هـ = ١٣٩,٩ سم

ق = ١٣٩,٣٥ سم

تمـاريـن ٤

١ ـ فيما يلى جدول تكرارى يوضح الأجرة الأسبوعيه لعدد من العمال بإحدى الورش .

فئات الأجر	١٠ ـ	٢٠ ـ	٣٠ ـ	٤٠ ـ	٥٠ ـ	٦٠ ـ ٧٠	الاجمالى
عدد العمال	٢	٨	١٠	٣٠	٢٥	١٥	٩٠

والمطلـوب :

إيجـاد

١ ـ الوسط الحسابى للأجر الأسبوعى بالورشه.

أولا : بالطريقة المباشرة .

ثانيا : طريقة الوسط الفرضى

ثالثا : طريقه الانحرافات المختصره

٢ ـ سيط الأجر.

٣ ـ منال الأجر ، حسابيا ، وبيانيا

(٢) فيما يلى توزيع تكرارى لصناديق التأمين الخاصة على حسب فئات المال الإحتياطى فى عامى ١٩٩٣/٩٢ ، ١٩٩٤/٩٣ فى ج.م.ع . (القيمـة بالمليون جنيه)

فئه المال الإحتياطى (ف)	أقل من ١	١ ـ	١٠ ـ	٥٠ ـ	١٠٠ ـ	٢٠٠ ـ ٣٠٠	الاجمالى
عدد الصناديق (٩٣/٩٢) $ك_١$	١٧٨	١٤٠	٣٠	٢	٢	١	٣٥٣
عدد الصناديق (٩٤/٩٣) $ك_٢$	١٨٧	١٧٥	٣٥	٥	٠	٣	٤٠٥

المطلوب :

١ ـ متوسط المال الإحتياطى لمجموعه الصناديق فى كل عام .

٢ ـ لماذا اختلف هذا المتوسط عام ٩٣/٩٢ عنه فى عام ١٩٩٤/٩٣ .

(٣) الجدول التالى يمثل عينة عدد حالات الطلاق التى تمت بإحدى المدن فى عام مصنفة طبقاً لمدة الحياة الزوجية بالسنين.

مدة الحياة الزوجية بالسنين (ف)	أقل من سنه	١ ـ	٢ ـ	٣ ـ	٤ ـ	٥ ـ	١٠ ـ	٢٥ ـ	٣٠ ـ ٥٠
عدد حالات الطلاق ك	٥٠	٣٠	٤٠	٢٠	١٠	٩	٦	٣	٢

المطلوب :

متوسط مدة الحياة الزوجية فى المدينة المذكورة لهذه العينة كوسط حسابى، وسيط، ومنوال، حسابياً، وبيانياً.

(٤) فيما يلى توزيع تكرارى لعينه من العمال طبقا لعدد أيام البطاله خلال عام .

فئات عدد أيام البطاله (ف)	١ ـ ٣	٤ ـ ٧	٨ ـ ١٠	١١ ـ ١٥	١٦ ـ ٢٠	٢١ ـ ٢٥
عدد العمال (ك)	٦٠	٢٥	١٥	٨	١٠	٢

والمطلوب :

تقدير متوسط عدد أيام البطاله السنويه للعامل الواحد فى العينه السابقه . سواء أكان وسطا حسابيا أو وسيطا أو منوالا .

(٥) الجدول التالى لتوزيع تكرارى لعدد ٦٠٠ أسرة موزعه على حسب الأنفاق الشهرى على بند الغذاء للأسرة الواحدة بالجنيه .

الدخل الشهرى بالجنيه	١٠٠-	١٥٠-	٢٠٠-	٣٠٠-	٥٠٠-	٨٠٠ فاكثر	المجموع
عدد الأسر	٥٠	٧٠	٨٠	١٠٠	٢٤٠	٦٠	٦٠٠

والمطلوب :

(أ) حساب المتوسط المناسب لإنفاق الأسرة على بند الغذاء للعينه السابقه.

(ب) إستنتج الوسط الحسابى لهذا الانفاق من التوزيع السابق.

(٦) قارن بين الوسط الحسابى ، والوسيط ، والمنوال لتوزيع الايرادات للمبيعات السنويه فى صناعتين مختلفتين (أ) صناعه السجاد ، (ب) صناعه الحديد والصلب والموضحه بالجدول التالى :

الإيرادات السنويه (بالألف جنيه)	عدد الصفقات	
	الصناعة (أ)	الصناعة (ب)
١٠-	٥	١
١٥-	١٨	٤
٢٠-	٢٠	١٠
٣٥-	١٠	١٥
٥٠-	١٠٠	١٨
٧٠-	٦٠	٢٠
٨٠-	٤	٣٠
١٠٠-	٢	٢٠
١٥٠-	٢	٥٠
٢٠٠-	٣	١٢٢
٤٠٠-٥٠٠	١	١٥٠
الاجمالى	٢٢٥	٤٤٠

(٧) فيما يلى التوزيع النسبى لكل من العمال والموظفين فى إحدى الشركات وفقا للأجر الشهرى بالجنيه .

فئات الأجر الشهرى	١٠٠ـ	١٥٠ـ	٢٠٠ـ	٣٠٠ـ	٥٠٠ـ	٨٠٠ـ١٠٠٠	٪
نسبه العمال ٪	٥	١٥	٢٥	٣٠	١٥	١٠	١٠٠
نسبة الموظفين ٪	٢	٥	١٥	٢٥	٤٥	٨	١٠٠

المطلوب :

(أ) حساب كل من الوسط الحسابى ، ووسيط الأجر الشهرى لكل من العمال والموظفين .

(ب) إذا علمت أنه بالشركة ٥٠٠ عامل ، ٥٠ موظف إستنتاج الوسط الحسابى للأجر الشهرى لجميع العاملين بالشركة .

(٨) احسب منوال الأجر للعمال، ومنوال الأجر للموظفين حسابيا، وبيانيا من الجدول السابق.

(٩) احسب مقياس النزعه المركزيه الذى تراه مناسبا للتوزيع التكرارى التالى ، ثم اذكر سبب إختيارك لهذا المقياس .

ف	أقل من ٢٠	٢٠ـ	٢٥ـ	٣٠ـ	٤٠ـ
(ك) النسبى	٠,١٠	٠,٢٠	٠,٣٥	؟	٠,١٥

(١٠) البيانات التاليه عباره عن كميه الأمطار بالمليمتر التى سقطت على مدينه بيروت خلال (٤٠ سنه) متتاليه :

٢٢,٤٥	٢٥.٩٣	٢٩,١٢	٢٩.٢٠	٢٦,٢٠
٣٤,٩٠	٢٥,٥١	٢٢,٨٨	٢٣,٢١	٢٧,٤٠
٣٠,٢٠	٢٢.٨٤	٢٣.١١	٣١.١١	٢٩,١٦
٣٥,٢٣	٢٨,٠٠	٢٤,٣٦	٢٧,١٥	٢٧,٩٥
٣٦,١٧	٢٤,٠٠	٢٥,٧٥	٣٦,٨٠	٢٨,٦٠
٣٨,٦٢	٢٦,٠٠	٣٣.١١	٢٧,٢٠	٣٥.١١
٣٣,٠٠	٣٣,٦٦	٣١,٨١	٣٢,١٧	٢٨,٦٠
٣٥,٠٠	٣١.٩٩	٢٨,٢١	٢٨,٩٠	٢٨,٤٠

المطلوب :

(أ) تبويب البيانات السابقه فى صورة جدول تكرارى منتظم طول فئه (٢ مليمتر) مبتدأ بالفئه (٢٢ -) .

(ب) إحسب كل من الوسط الحسابى ، والوسيط ، والمنوال مع الحكم على شكل التوزيع .

(١١) إحسب الوسط الحسابى العام من البيانات التاليه .

$ن_{١} = ٧$ $ن_{٤} = ١٥$

$ن_{٢} = ٩$ $ن_{٥} = ٢٠$

$ن_{٣} = ١٢$ $ن_{٦} = ٣٠$

$\bar{س}_{١} = ٢٠$ $\bar{س}_{٤} = ٥٠$

$\bar{س}_{٢} = ٣٠$ $\bar{س}_{٥} = ٦٠$

$\bar{س}_{٣} = ٤٠$ $\bar{س}_{٦} = ٧٠$

(١٢) إحسب كل من

(أ) الوسط الحسابى   (ب) الوسيط   (جـ) المنوال

للتوزيع التكرارى التمرين رقم (٢٢) فى تمارين (١) السابقه.

(١٣) اذا علمت أن :

التكرار المعدل النسبى = التكرار المعدل ÷ مجموع التكرارات المعدله

التكرار النسبى المعدل = التكرار النسبى ÷ طول الفئه

فأثبت أن :

المنوال المحسوب من التكرار المعدل النسبى يساوى المنوال المحسوب من التكرار النسبى المعدل .

(١٤) أوجد الوسط الهندسى للقيم التاليه :

١٤ ، ١٢ ، ١٧ ، ٥ ، ٧ ، ٩ ، ٤ ، ٢

(١٥) قارن بين الوسط الحسابى والوسط الهندسى والوسط التوافقى للتوزيع التكرارى التالى لعينه من عمال أحد المصانع :

مدة التغيب بالايام	٥ـ	١٠ـ	١٥ـ	٢٠ـ	٢٥ـ	٣٠ـ	٣٥ـ ٥٠
عدد العمال	١٠	٢٥	٣٠	٥٠	١٥	١٢	٨

(١٦) قطعت طائرة ١٠٠ ميل بسرعه ٦٥٠ ميل فى الساعه ثم ٢٠٠ ميل التاليه بسرعه ٧٥٠ ميل فى الساعه ثم ٣٠٠ ميل تاليه بسرعه ٨٠٠ ميل فى الساعه ، إحسب متوسط سرعه الطائرة .

(١٧) إحسب الوسط الحسابى والوسط الهندسى والوسط التوافقى للأرقام من ١ إلى ٢٠ ثم تحقق من أن $\bar{س}$ > هـ > ق .

(١٨) فيما يلى جدول تكرارى لحجم الودائع فى أحد البنوك (بالألف جنيه) لعينه من عملاء هذا البنك .

فئه الودائع	٢٠ـ	٥٠ـ	١٠٠ـ	٢٠٠ـ	٤٠٠ـ	٥٠٠ـ١٠٠٠
عدد العملاء	٣٠٠	١٥٠	٥٠	١٠٠	١٠٠	٥٠

المطلوب

(أ) الوسط الحسابى ، والوسيط ، والمنوال لهذا التوزيع .

(ب) إستخدام بيانات الوسط الحسابى والوسيط في الحكم على شكل التوزيع .

(جـ) الوسط الهندسى والوسط التوافقى لهذا التوزيع .

الفصل الخامس

مقاييس التشتت

Measures Of Disporsion

مقدمة عامة :

فى الفصل السابق ـ المتوسطات ـ تم تلخيص بيانات الظاهرة موضوع الدراسة فى صورة رقم واحد ـ الوسط الحسابى أو الوسيط المنوال ... الخ .. لكن قيم المتوسطات السابقة لا تعطى صورة كاملة عن خصائص أو توزيع الظاهرة موضوع الدراسة، ذلك أنها لا تكفى لاعطاء فكرة عن درجة التجانس أو الإختلاف ـ التباين ـ بين قيم هذه الظاهرة ، وللأمر السابق أهمية كبيرة خاصة إذا تعلق الأمر بمقارنة مجموعتين أو أكثر من البيانات الإحصائية.

تعريف التشتت وأهميته.

التشتت فى مجموعة من القيم يقصد به التباعد بين مفرادت هذه المجموعه أو التفاوت والإختلاف بينها ، وهذا التفاوت أو التشتت قد يكون صغيراً إذا كانت قيم مفردات المجموعة قريبة من بعضها البعض، بينما يكون التشتت كبيراً إذا كانت هذه القيم بعيدة عن بعضها البعض.

ونظراً لأنه من النادر تساوى كل من أعمار مجموعة من الطلبة أو أوزانهم أو أطوالهم، كما أنه نادراً ما تتساوى تقديرات نجاح جميع الطلبة فى أى سنة دراسية، لكن من الطبيعى أن يوجد اختلاف بين أعمار هؤلاء الطلبة أو أوزانهم أو أطوالهم، وهكذا بالنسبة لتقديرات نجاح الطلبة فى سنة دراسية ما ... وهكذا الأمر فى باقى الظواهر الأخرى.

لكل ما تقدم فإن القيمة التى نعتبرها ممثله لمجموعة من القيم ـ المتوسطات ـ لأبد أن تكون مصحوبة بقيمة أخرى تقيس لنا مدى تباعد هذه القيم أو قربها من بعضها أو المتوسط لأنه إذا كبر مقياس التشتت إلى درجة كبيرة، فإن

مقياس المتوسط يفقد أهميتـه كقيمة ممثله لمجموعة القيم والعكس صحيح إذا كان مقياس التشتت صغيراً ، فتزداد أهميـة مقياس المتوسط كقيمـة ممثله لمجموعة القيم (فى البحث الإحصائى) .

لهذا فإن مقدار التشتت يعتبر مقياساً لقياس تجانس أو تشتت البيانات الاحصائيـة أو عدم تجانسها فى ظاهرة ما .

والأمثلة التالية توضح لنا ما تقدم.

مثـــــال (١) :

ما يلى مجموعتين متساويتين من مفردات القيم عدد ١ ومجموعاً (عدد القيم فى كل منها ٨ قيم ومجموعها ٨٠) .

المجموعة (١) ومفرداتها : ١ ، ٣ ، ٥ ، ٩ ، ١٠ ، ١٢ ، ٢٠ ، ٢٠

المجموعة (٢) ومفرداتها :٢ ، ٤ ، ٤ ، ٧ ، ١٠ ، ٨ ، ١٠ ، ٢٠ ، ٢٥

فيمكن قياس الوسط الحسابى لكل منها كمايلى :

$$\bar{س}_{١} = \frac{مجـ س_{١}}{ن} = \frac{٨٠}{٨} = ١٠$$

$$\bar{س}_{٢} = \frac{مجـ س_{٢}}{ن} = \frac{٨٠}{٨} = ١٠$$

ونظراً لأن الوسط الحسابى لهما واحداً وهو القيمة (١٠) فكان يمكن الظن بأن توزيعهما واحد أيضاً ، لكن الواضح أن توزيع مفردات المجموعة (١) تختلف عن توزيع مفردات المجموعة (٢) تماماً، أى أن هناك إختلاف أو تباين بين مفردات مجموعتى القيم برغم إشتراكهما فى المتوسط، أو بمعنى آخر هناك عدم تجانس (تشتت) بين بيانات مفردات المجموعتين.

والسؤال الآن : ما هى المقاييس التى تقيس لنا مدى تشتت أو تباعد القيم أو بمعنى آخر مقاييس التشتت المختلفة.

مقاييس التشتت المختلفة :

هناك مقاييس متعددة للتشتت ، منها مقاييس تكون من نفس نوعيه وحدات الظاهرة التى نقوم بدراستها ، يطلق عليها مقاييس التشتت المطلق ، ومقاييس أخرى نسبية أى فى صورة نسبة مئوية مختلفة عن وحدات الظاهرة موضوع القياس يطلق عليها مقاييس التشتت النسبى، والأخيره تتميز بصلاحيتها للإستخدام عند المقارنة بين مجموعتين مختلفين من حيث وحدات القياس للظواهر ، وهو ما لا يمكن إجراؤه باستخدام مقاييس التشتت المطلقه لإختلاف نوعية وحدات القياس بينهما .

أولاً : مقاييــس التشــتت المطــلــق :

هناك عدة مقاييس إحصائية لقياس التشتت المطلق تختلف فيما بينها من حيث الدقة، والسهولة، والأساس النظرى الذى يبنى عليه كل منها ومن أهمها:

(١) المـــــدى : *Range*

ويعتبر من أسهل وأبسط مقاييس التشتت، وإن كان ليس أدقها، وهو يمثل الفرق بين أكبر قيمة وأصغر قيمـة بين مفردات الظاهرة موضوع الدراسة أى أن:

المدى لمجموعة من القيم = أكبر قيمة ـ أصغر قيمة (فى نفس المجموعة)

مثـــــال (١) : فى المثال رقم (٢) فى الفصل الثالث الخاص بتوزيع أطوال ٥٠ تلميذاً باحدى الفصول الدراسيـة ، إحسب المدى لتوزيع أطوال التلاميذ فى الفصل كعينـة لأطوال التلاميذ فى السنة الدراسيـة .

الحـــــل :

حيث أطول تلميذ فى المجموعة يبلغ طوله ١٥٤ سم ، وأصغر تلميذ فى المجموعة يبلغ طوله ١٢٥سم وعليه فـإن :

المدى = ١٥٤ ـ ١٢٥ = ٢٩ سم

مثـــــال (٢) : لو أخذت عينة متساوية فى عددها ٥٠ تلميذاً ومختلفين فى الطول حيث بلغ طول أكبر تلميذ بها ١٦٠ سم وطول أصغر تلميذ بها ١٢٠ سم فإن:

مدى الطول فى العينة الأخيرة = ١٦٠ ـ ١٢٠ = ٤٠ سم .

وعليه يمكننا القول بأن العينة الاولى للتلاميذ فى مثال (١) أقل تشتتاً من العينة الثانية فى مثال (٢) لأن المدى فى الأولى بلغ ٢٩ سم والمدى فى الثانية بلغ ٤٠ سم.

وبمعنى آخر فإن العينة الثانيه أقل تجانساً من العينة الأولى ، أى أن أطوال التلاميذ فى العينة الأولى أكثر تقارباً ـ أو أقل إختلافا ـ من العينة الثانية .

مثال (٣) أوجد المدى فى المثال رقم (٢) بالفصل الثالث والخاص بالتوزيع التكرارى لأطوال مجموعة التلاميذ .

الحـــل :

حيث أن التوزيع التكرارى لأطوال التلاميذ كان كما يلى :

ف	١٢٥ـ	١٣١ـ	١٣٧ـ	١٤٣ـ	١٤٩ـ ١٥٥	المجموع
ك	٦	١١	١٥	١٢	٦	٥٠

فإن المدى فى التوزيعات التكرارية هنا هو الفرق بين الحد الأعلى للفئة الأخيره ، والحد الأدنى للفئة الأولى .

أى أن :

المدى فى التوزيع التكرارى = الحد الأعلى للفئه الأخيره فى التوزيع ـ الحد الأدنى للفئة الأولى فى التوزيع

وفى مثالنا = ١٥٥ ـ ١٢٥ = ٣٠ سم.

مثال (٤) أما المدى لعدد أيام الغياب فى المثال رقم (٣) فى الفصل الثالث

أيضاً = ٣٦ - ١ = ٣٥ يوماً.

ويعيب المدى كمقياس للتشتت المطلق ، عدم الدقة ، نظراً لإعتماده فى

القياس على قيمتين فقط ـ أو حدين فقط ـ وهما أكبر وأصغر قيمة فى مجموعة القيم أو الحد الأعلى للفئة الأخيرة والحد الأدنى للفئة الأولى فى التوزيع التكرارى ، وقد يكون إحداهما أو كلاهما متطرفاً بينما القيم الأخرى متجمعة بالقرب من بعضها البعض.

لذلك عادة مايستخدم المدى عندما نرغب فى قياس تقريبى سريع لمدى تشتت المفردات دون الاهتمام بالدقة فى القياس،أو حين يكون للمفردات المتطرفه أهمية خاصة، كتوزيعات درجات الحرارة على سبيل المثال ، حيث تعلن درجات الحرارة اليومية بأعلى درجه وأدنى درجه (العظمى والصغرى) خلال اليوم كما يشيع إستخدام المدى فى حالات ضبط مراقبة جودة الإنتاج .

(٢) نصف المدى الربيعى (الإنحراف الربيعى) *Quarti Deviation*

وهو مقياس آخر للتشتت المطلق ، وبمقتضاه نتلاشى العيب الموجود بالمدى المطلق السابق ، وذلك بالإعتماد على قيمتين آخرتين هما الربيع الأعلى والربيع الأدنى .

فنظراً لأن الربيع الأدنى (ر١) يقع فى نهاية الربع الأول (٢٥٪) من مجموعة القيم بعد ترتيبها تصاعدياً والربيع الأعلى (ر٣) يقع فى نهاية الربع الثالث أى فى نهاية (٧٥٪) منها كما يلى:



وبالطبع أى مقياس تشتت يأخذ فى الاعتبار المدى بينهما (ر٣ ــ ر١) سيضمن عدم تأثره بالقيم المتطرفة ، أو الشاذة ، والتى عادة ما تقع فى بداية القيم أو فى نهايتها ، وذلك بإستبعادنا كل من القيم التى تسبق الربيع الأدنى (ر١) وبعد الربيع الأعلى (ر٣) وبذلك الإجراء نضمن عدم تأثره بمثل هذه القيم المتطرفة ، حيث تنحصر القيم ذات الأهمية فى مجموعة القيم بينهما والذى نطلق عليه المدى الربيعى أو الإنحراف الربيعى.

لكل ماتقدم فإنه من المنطق والأفضل الإعتماد على منطقة المدى الربيعية، عند حساب نصف المدى الربيعى والذى يفسر على أنه معدل إختلاف الربيع الأعلى أو الربيع الأدنى عن الوسيط فى التوزيع التكرارى وذلك لأن نصف المدى الربيعى (الانحراف الربيعى) .

$$\text{أى} = \frac{\text{قيمة الربيع الأعلى ـ قيمة الربيع الأدنى}}{2}$$

$$\text{أى} = \left(\frac{ر_3 - ر_1}{2}\right)$$

مثـال (٥) : أوجد نصف المدى الربيعى فى المثال رقم (٣) السابق.

الحـــل :

من المثال رقم (٩) فى المبحث الثانى من الفصل الرابع السابق نجد أن:

قيمة الربيع الأدنى ($ر_1$) = ١٣٤,٥٥ سم

قيمة الربيع الأعلى ($ر_3$) = ١٤٥,٧٥ سم

وعليه فـإن :

$$\text{نصف المدى الربيعى} = \frac{١٤٥,٧٥ - ١٣٤,٥٥}{٢}$$

$$= \frac{١١,٢٠}{٢} = ٥,٦\text{سم}$$

مثـــال (٦) إحسب نصف المدى الربيعى فى التوزيع التكرارى التالى للأجر اليومى بالجنيه لعدد ٢١٠ عاملاً بأحد المصانع.

فئة الأجر اليومى (ف)	٥ ــ	١٠ ــ	٢٠ ــ	٤٠ ــ	٥٠ ــ ٦٠	المجموع
عدد العمال (ك)	٢٠	٣٠	١٠٠	٢٠	٤٠	٢١٠

الحـــل

ف	ك	حدود الفئات	ت.م.ص	ملاحظات
٥_	٢٠	أقل من ٥	صفر	
١٠_	٣٠	أقل من ١٠	٢٠	
٢٠_	١٠٠	أقل من ٢٠	٥٠	ت.م.ص السابق
				٥٢,٥ ترتيب $ر_{١}$ ←
٤٠_	٢٠	أقل من ٤٠	١٥٠	ت.م.ص السابق
				١٥٧,٥ ترتيب $ر_{٣}$ ←
٥٠_٦٠	٤٠	أقل من ٥٠	١٧٠	
		أقل من ٦٠	٢١٠	
المجموع	٢١٠			

$$\text{ترتيب } ر_{١} = \frac{\text{مجـ ك}}{٤} = \frac{٢١٠}{٤} = ٥٢,٥$$

$$\text{ترتيب } ر_{٣} = \frac{\text{مجـ ك}}{٤} \times ٣ = \frac{٢١٠}{٤} \times ٣ = ١٥٧,٥$$

$$\text{قيمة } (ر_{١}) = ٢٠ + \left(\frac{٥٢,٥ - ٥٠}{١٠٠} \times ٢٠\right)$$

$$= ٢٠ + \frac{٢,٥ \times ٢٠}{١٠٠}$$

$$= ٢٠ + ٠,٥ = ٢٠,٥ \text{ جنيه}$$

$$\text{قيمة } (ر_{٣}) = ٤٠ + \left(\frac{١٥٧,٥ - ١٥٠}{٢٠} \times ١٠\right)$$

$$= ٤٠ + \frac{٧,٥ \times ١٠}{٢٠}$$

$$= ٤٠ + ٣,٧٥$$

= ٤٣,٧٥ جنيهاً

نصف المدى الربيعى (الانحراف الربيعى)

$$= \frac{٤٣,٧٥ - ٢٠,٥}{٢}$$

$$= \frac{٢٣,٢٥}{٢} = ١١,٦٣$$ جنيهاً

وعادة ما يستخدم نصف المدى الربيعى فى الحالات التالية :

١ ـ عندما نستخدم الوسيط كمقياس لمتوسط التوزيع التكرارى .

٢ ـ أيضا عندما يكون التوزيع التكرارى مفتوحاً .

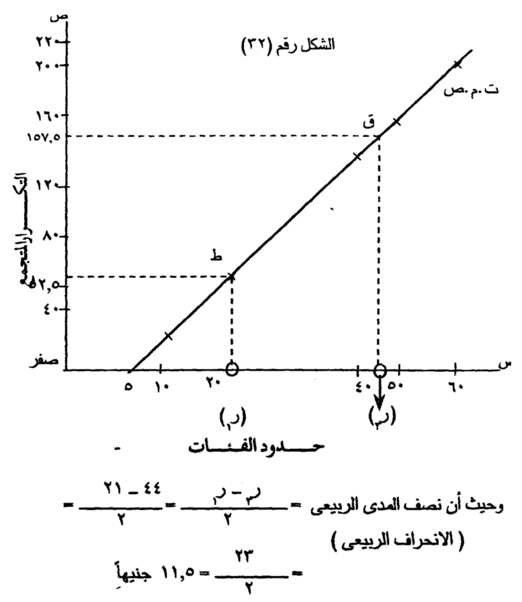
٣ ـ وأيضاً عندما تكون هناك مفردات قليلة متطرفة فى مجموعة القيم أو يكون التوزيع شديد الالتواء

٤ ـ فى حالات البيانات الوصفية القابلة للترتيب .

مثال (٧) إحسب الانحراف الربيعى فى المثال رقم (٦) السابق باستخدام أسلوب الرسم البيانى :

الحل :

بعد إعداد الجدول التكرارى المتجمع الصاعد ، وتحديد ترتيب كلا من (ر١) ، (ر٣) فإننا من الرسم البيانى التالى ، نقدر قيمة الانحراف الربيعى كما فى الشكل رقم (٣٢) التالى :



وحيث أن نصف المدى الربيعى = $\frac{ر_3 - ر_1}{٢}$ = $\frac{٤٤ - ٢١}{٢}$ =
(الانحراف الربيعى)

= $\frac{٢٣}{٢}$ = ١١,٥ جنيهاً

وبالطبع تتوقف دقة حساب قيمه الانحراف الربيعى على الدقة فى الرسم البيانى ، لكل ماسبق يعتبر الإنحراف الربيعى أفضل من المدى المطلق كمقياس للتشتت، ولكن نظراً لاعتمادهما المدى، والانحراف الربيعى - على مفردتين فقط عند حساب قيمتهما ، وإهمال باقى مفردات الظاهرة موضوع القياس فيعتبرا مقياسين غير جيدين لقياس التشتت، لهذا يعتبرا من مقاييس التشتت غير شائعة الاستخدم، كما يعيب الإنحراف الربيعى أنه يعتمد على مقياس موضع ،

لذا يعتبر صورة من صور المدى ، كما أنه يهمل ٥٠٪ من بيانات الظاهرة موضوع الدراسة ، لذا كان لابد من البحث عن مقاييس أخرى للتشتت المطلق بفكر وأساس مختلف عما سبق.

٣ ـ الإنحـــراف المتوسط : Mean *Deviation*

كلا من المدى المطلق ونصف المدى الربيعى ، قاما على فكرة قياس تشتت مجموعة قيم الظاهرة عن بعضها البعض ، وبمعنى آخر مدى الإختلاف بين القيم المختلفة لمفردات الظاهرة موضوع الدراسة ، لكن عند دراستنا لموضوع المتوسطات إتفقنا على أنه من الممكن تلخيص مجموعة من القيم لظاهرة ما فى رقم واحد هو المتوسط ـ الوسط الحسابى ، الوسيط ، المنوال ـ ومن ثم فإن الإنحراف المتوسط سيعتمد على قياس التشتت بين قيم مفردات الظاهرة عن متوسطها وليس عن بعضها البعض كما هو الحال فى المقاييس السابقة للتشتت ، على أنه من المفضل إستخدام انحراف القيم عن وسطها الحسابى ($\bar{س}$) دون باقى المتوسطات .

وماسبق يعنى حساب الفرق بين كل قيمة من قيم الظاهرة (س) والوسط الحسابى لمجموعة القيم ($\bar{س}$) ، ومما لاشك فيه أن التشتت حول هذه القيمة ($\bar{س}$) يكون كبيراً أو صغيراً حسب ما تكون عليه هذه الفروق كبيرة أو صغيرة فى مجموعها.

لكننا سبق أن أوضحنا (*) أنه من أهم خصائص الوسط الحسابى أن مجموع انحرافات القيم عن وسطها الحسابى = صفر أى [مجـ (س ـ $\bar{س}$)] = صفر، و الخاصية السابقة تتناقض مع ما سبق ذكره عند إيضاح الأساس الذى يعتمد عليه حساب قيمة الانحراف المتوسط ، لأن معنى ذلك أن قيمة الإنحراف المتوسط لابد وأن تساوى (صفر) دائما ، أى سيكون إنحراف بدون قيمة وبالتالى بدون معنى .

(*) المبحث الأول : الفصل الرابع

وللتخلص من المشكلة السابقة عند حساب الانحراف المتوسط وحتى يكون له قيمة ومعنى ، فإننا سنهتم بالقيم المطلقة للانحرافات | س ـ س̅ | ، وبالتالى مجموع إنحرافات القيم المطلقة عن وسطها الحسابى أى مجـ | س ـ س̅ | ، وهذا يعنى تجريد هذه الانحرافات من إشاراتها الجبرية السالبة وذلك بإهمال مثل هذه الإشارات السالبة (*) ونتصور أن كل الانحرافات موجبة .

وللحصول على الانحراف المتوسط فإننا نقسم مجموع هذه الفروق بعد اهمال إشارتها السالبة (مجـ | س ـ س̅ |) على عدد القيم ليعطى لنا قيمة الإنحراف المتوسط .

(أ) الانحراف المتوسط لقيم كمية غير مبوبة :

مثـــال (٨) أوجد الانحراف المتوسط لدرجات عينة مكونة من ١٠ طلاب فى مادة الرياضيات التالية :

٥٠ ، ٦٠ ، ٨٥ ، ٩٠ ، ٥٥ ، ٤٥ ، ٥٥ ، ٧٥ ، ١٠ ، ١٠٠

الحـــل :

$$\text{الانحراف المتوسط} = \frac{\text{مجـ } |س - \bar{س}|}{ن} \quad \text{أو} \quad \frac{\text{مجـ } |ح|}{ن}$$

حيث س تمثل القيم ، س̅ تمثل الوسط الحسابى لمجموعة هذه القيم ، ن عدد مفردات هذه القيم .

خطوات الحـــل :

$$(1)\ \bar{س} = \frac{\text{مجـ س}}{ن} = \frac{٦٠٠}{١٠} = ٦٠ \text{ درجه}$$

(*) سبب أهمال إشارة الانحرافات السالبة ، هو أننا ننظر إلى الإنحراف بإعتباره مجرد فرق بين القيمة والمتوسط بصرف النظر عن كون هذا الفرق بالنقص أو بالزيادة ، لأن التشتت الذى نريد قياسه لايميز بين النقص والزيادة عن المتوسط بل يهتم بمقدار البعد عنه .

(٢) مجموع انحرافات القيم المطلقة عن وسطها الحسابى مجـ | س ـ سَ | =

| س١ ـ سَ | + | س٢ ـ سَ | + | س٣ ـ سَ | + ... + | س١٠ ـ سَ |

أى: | ح١ | + | ح٢ | + | ح٣ | + ... + | ح١٠ |

= | ٢٥ ـ ٦٠ | + | ٦٠ ـ ٦٠ | + | ٨٥ ـ ٦٠ | + | ٩٠ ـ ٦٠ | + | ٥٥ ـ ٦٠ |

٣٥ + صفر + ٢٥ + ٣٠ + ٥

+ | ٤٥ ـ ٦٠ | + | ٥٥ ـ ٦٠ | + | ٧٥ ـ ٦٠ | + | ١٠ ـ ٦٠ | + | ١٠٠ ـ ٦٠ |

+ ١٥ + ٥ + ١٥ + ٥٠ + ٤٠

= ٢٢٥

(٣) الانحـــراف المتـــوسط = مجـ | س ـ سَ | / ن أو مجـ | ح | / ن

(متوسط الإنحرافات المطلقة)

= ٢٢٥ / ١٠ = ٢٢,٥ درجـة

أى أن التشتت حول الوسط الحسابى يبلغ ٢٢,٥ درجـه .

(ب) الانحراف المتوسط للقيم الكميـة المبوبة (التوزيعات التكرارية)

لإيجاد الانحـراف المتوسط من بيانات مبوبـة نتبع الخطوات التالية :

١ ـ إيجاد الوسط الحسابى (سَ)

٢ ـ حساب الانحرافات المطلقة | ح | وهى تساوى | س ـ سَ | حيث س مراكز الفئـات

٣ ـ ضرب تكرار كل فئـة فى إنحرافها المطلق المناظر أى : | س ـ سَ | ك

٤ ـ جمـع حاصـل ضـرب كل فئـة فى انحـرافها المطلق المناظر أى مجـ(| س ـ سَ | ك).

٥ ـ بقسمة مجـ (| س ـ سَ | ك) على إجمالى التكرارات مجـ (ك) نحصل على الانحراف المتوسط

أى أن الانحراف المتوسط = $\frac{١}{\text{مجـ ك}}$ [مجـ (| س ـ سَ |)ك]

مثـــال (٩) : أوجد الإنحـراف المتوسط لأجر العامل بالجنيه من التوزيع التكرارى التالى :

فئة الاجر (ف)	٥ ـ	١٠ ـ	٢٠ ـ	٤٠ ـ	٥٠ ـ ٦٠	المجموع
عدد العمال (ك)	٢٠	٣٠	١٠٠	٢٠	٤٠	٢١٠

الحـــــل :

ف	ك	مراكز الفئات س	س ك	| س ـ سَ | | ح |	| س ـ سَ | ك أى | ح | ك
٥ـ	٢٠	٧,٥	١٥٠	٢٤,٤	٤٨٨
١٠ـ	٣٠	١٥	٤٥٠	١٦,٩	٥٠٧
٢٠ـ	١٠٠	٣٠	٣٠٠٠	١,٩	١٩٠
٤٠ـ	٢٠	٤٥	٩٠٠	١٣,١	٢٦٢
٥٠ـ٦٠	٤٠	٥٥	٢٢٠٠	٢٣,١	٩٢٤
المجموع	٢١٠		٦٧٠٠		٢٣٧١

سَ = $\frac{\text{مجـ س ك}}{\text{مجـ ك}}$ = $\frac{٦٧٠٠}{٢١٠}$ = ٣١,٩ جنيه

الانحراف المتوسط = $\frac{١}{\text{مجـ ك}}$ مجـ [(| س ـ سَ | ك)]

= $\frac{١}{٢١٠}$ [٢٣٧١]

= ١١,٢٩ جنيهاً

لكن نظراً لصعوبة إجراء حسابات هذا المقياس من ناحيه ، ولاهماله لإشارات الفروق السالبة - وهى عملية غير منطقية - من ناحية أخرى، جعلاه (أى الإنحراف المتوسط) مقياس تشتت غير شائع الإستخدام بين الإحصائين.

(٤) الإنحـــراف المعيارى ***Standard Deviation***

وهو من أهم وأشهر مقاييس التشتت المطلق على الإطلاق ، ويعتمد فى قياسه أيضاً على مدى تباعد أو تقارب قيم مفردات الظاهرة موضوع القياس عن وسطها الحسابى ، كما هو الحال فى الانحراف المتوسط ، لكن إذا كان الانحراف المتوسط قام على فكرة إهمال الإشارات السالبة للفروق بين القيم ووسطها الحسابى ، فإن الانحراف المعيارى يقوم على فكرة أخرى وهى تربيع هذه الفروق (*) ، وذلك كإجراء للقضاء على تلاشى مجموع الفروق بين القيم ووسطها الحسابى - وبالطبع إجراء عملية تربيع الفروق ، أكثر منطقية من إهمال الإشارات السالبة لهذه الفروق فى الانحراف المتوسط.

بعد إجراء عملية التربيع السابقة لهذه الفروق ، فبقسمة مجموع مربعات هذه الفروق على عددها ينتج لنا مقياس يطلق عليه التباين (Variance) (ويرمز له بالرمز $ع^2$ اذا كان التوزيع لعينة ، σ^2 اذا كان التوزيع لمجتمع إحصائى) أى أن التباين عبارة عن متوسط مجموع مربع إنحرافات القيم عن وسطها الحسابى (ويكون تمييز التباين وحدة قياس مربعة للظاهرة موضوع الدراسة) أى أن :

$$ع^2 \text{ أو } \sigma^2 = \frac{\text{مجـ } (س - \bar{س})^2}{ن}$$ (لبيانات كمية غير مبوبة)

(*) إجراء عملية التربيع لأى قيمة سالبة تحولها إلى قيمة موجبة ، وهكذا تكون الفروق السالبه بعد لجراء عملية التربيع موجبه .

$$\text{ا، ع}^2 \text{ أو } \sigma^2 = \frac{\text{مجـ}(\text{س} - \bar{\text{س}})^2 \text{ك}}{\text{مجـ ك}}$$ (لبيانات كمية مبوبـة)

لكن بأخذ الجذر التربيعى للتباين ينتج لنا الانحــراف المعيارى (ويكون تمييزه بوحدة قياس من نفس نوعيـة البيانات الأصلية للظاهرة موضـوع الدراسة).

وعليـه فإنـه يمكن تعريف الإنحــراف المعيارى (ع أو σ) بأنـه :

• الجذر التربيعي لمتوسط مجموع مربعات إنحرافات القيم عن وسطها الحسابى أى أن :

$$\text{ع} = \sqrt{\text{ع}^2}$$ (لمفردات عينــه إحصائيــة)

$$\text{أو } \sigma = \sqrt{\sigma^2}$$ (لمفردات مجتمع إحصائى)

أولاً : الإنحراف المعيارى لبيانات كمية غير مبوبـة.

خطوات إيجاد الانحـــراف المعيارى :

١ ـ حساب الوسط الحسابى ($\bar{\text{س}}$) لمجموعة القيم

٢ ـ حساب انحراف القيم المختلفة عن وسطها الحسابى ($\text{س} - \bar{\text{س}}$) أى ح

٣ ـ تربيع الانحرافات السابقة ($\text{س} - \bar{\text{س}}$)^2 أو ح^2 ثم ايجاد مجموعها أى مـجـ ($\text{س} - \bar{\text{س}}$)^2 وبقسمتـها على (ن) إى عدد مفردات القيم ينتج لنا متوسط مجموع مربعات الفروق:

٤ ـ بأخذ الجذر التربيعى لمتوسط مجموع مربعات الفروق ، ينتج لنا الانحراف المعيارى المطلوب :

مثـــال (١٠) أوجد الإنحــراف المعيارى للمجموعة رقم (٢) بالمثال رقم (١) فى بدايـة هذا الفصل .

الحـــل :

الطريقة الأولى(١) : $\bar{س} = \frac{مجـ س}{ن} = \frac{٨٠}{٨} = ١٠$

القيم (س) ٢ ، ٤ ، ٤ ، ٧ ، ٨ ، ١٠ ، ٢٠ ، ٢٥

الوسط الحسابى ($\bar{س}$) ١٠ ، ١٠ ، ١٠ ، ١٠ ، ١٠ ، ١٠ ، ١٠ ، ١٠

(٢) (س ـ $\bar{س}$) الانحـراف (ح) ـ٨، ـ٦ ، ـ٦، ـ٣، ـ٢، صفر، +١٠، +١٥

(٣) مجـ $(س - \bar{س})^٢$: ٦٤ + ٣٦ + ٣٦ + ٩ + ٤ + صفر + ١٠٠ + ٢٢٥

= ٤٧٤

(٤) ∴ $ع^٢ = \frac{مجـ (س - \bar{س})^٢}{ن} = \frac{٤٧٤}{٨} = ٥٩,٢٥$

(٥) $ع = \sqrt{ع^٢}$

أو

$ع = \sqrt{\frac{مجـ (س - \bar{س})^٢}{ن}}$

$= \sqrt{\frac{٤٧٤}{٨}} =$

$= \sqrt{٥٩,٢٥} = ٧,٧$

الطريقة الثانيـة :

∵ مجـ $(س - \bar{س})^٢$ = مجـ $(س^٢ - ٢س \bar{س} + \bar{س}^٢)$

لكن $\bar{س} = \frac{مجـ س}{ن}$

= مجـ $\left[س^٢ - \frac{٢س مجـ س}{ن} + \left(\frac{مجـ س}{ن}\right)^٢ \right]$

$$= \text{مجـ س}^2 - \frac{2\,(\text{مجـ س})^2}{\text{ن}} + \text{ن}\,\frac{(\text{مجـ س})^2}{\text{ن}^2}$$

$$\therefore \text{مجـ}\,(\text{س} - \bar{\text{س}})^2 = \text{مجـ س}^2 - \left(\frac{\text{مجـ س}}{\text{ن}}\right)^2$$

ويكون :

$$\text{ع}^2 = \frac{\text{مجـ س}^2}{\text{ن}} - \left(\frac{\text{مجـ س}}{\text{ن}}\right)^2$$

$$\text{، ع} = \sqrt{\frac{\text{مجـ س}^2}{\text{ن}} - \left(\frac{\text{مجـ س}}{\text{ن}}\right)^2}$$

ومما لاشك فيه أن حساب التباين (ع^2) أو الانحراف المعياري (ع) بالطريقة الثانية تكون أكثر ملاءمة من حيث العمليات الحسابية ، ويتضح ماتقدم من حل المثال التالي :

مثال (١١) حل المثال رقم (١٠) السابق باستخدام الطريقة الثانية:

حيث أن مجـ س = ٢ + ٤ + ٤ + ٧ + ٨ + ١٠ + ٢٠ + ٢٥ = ٨٠

، مجـ س٢ = ٤ + ١٦ + ١٦ + ٤٩ + ٦٤ + ١٠٠ + ٤٠٠ + ٦٢٥

= ١٢٧٤

$$\text{، ع}^2 = \frac{\text{مجـ س}^2}{\text{ن}} - \left(\frac{\text{مجـ س}}{\text{ن}}\right)^2$$

$$= \frac{1274}{8} - \left(\frac{80}{8}\right)^2$$

= ١٥٩,٢٥ - ١٠٠ = ٥٩,٢٥

$\therefore$ ع = $\sqrt{\text{ع}^2}$ = $\sqrt{59{,}25}$ = ٧,٧ (نفس النتيجه بالطريقة الأولى)

$$أ و ع = \sqrt{\frac{مجـ س^{٢}}{ن} - \left(\frac{مجـ س}{ن}\right)^{٢}}$$

$$= \sqrt{\frac{١٢٧٤}{٨} - \left(\frac{٨٠}{٨}\right)^{٢}}$$

$$= \sqrt{١٥٩,٢٥ - ١٠٠}$$

$$= \sqrt{٥٩,٢٥} = ٧,٧ \text{ سم}$$

ثانياً : الإنحـراف المعيـارى لبيـانات مبوبـة (توزيعات تكراريـة):

مثـــال (١٢) أوجد الإنحـراف المعيارى للتوزيع التكرارى التالى :

فئة الطول (ف)	١٢٥_	١٣١_	١٣٧_	١٤٣_	١٤٩_١٥٥	المجمـوع
عدد التلاميذ (التكرار) ك	٦	١١	١٥	١٢	٦	٥٠

الحـــل :

الطـريقـة الأولـــى :

ف	ك	مراكـز الفئـات س	س ك	ح:(س ـ $\bar{س}$)	ح^{٢}:(س ـ $\bar{س}$)^{٢}	(س ـ $\bar{س}$)^{٢}ك
١٢٥_	٦	١٢٨	٧٦٨	١٢,١٢_	١٤٦,٨٩٤	٨٨١,٣٦٤
١٣١_	١١	١٣٤	١٤٧٤	٦,١٢_	٣٧,٤٥٤	٤١١,٩٩٤
١٣٧_	١٥	١٤٠	٢١٠٠	٠,١٢_	٠,٠١٤	٠,٢١٠
١٤٣_	١٢	١٤٦	١٧٥٢	٥,٨٨	٣٤,٥٧٤	٤١٤,٨٨٨
١٤٩_١٥٥	٦	١٥٢	٩١٢	١١,٨٨	١٤١,١٣٤	٨٤٦,٨٠٤
المجموع	٥٠		٧٠٠٦	١٧,٧٦+ ١٨,٣٦_ ٠,٦٠		٢٥٥٥,٢٦٠

$$(1)\ \bar{س} = \frac{مجـ\ س\ ك}{مجـ\ ك} = \frac{٧٠٠٦}{٥٠} = ١٤٠,١٢\ سم$$

$$(2)\ ع^2 = \frac{مجـ\ (س - \bar{س})^2 ك}{مجـ\ ك} = \frac{٢٥٥٥,٢٦}{٥٠}$$

$$= ٥١,١١\ سم^2$$

$$(3)\ ع = \sqrt{ع^2}\ .$$

$$= \sqrt{٥١,١١} = ٧,١٤٨\ سم$$

$$أو\ ع = \sqrt{\frac{مجـ\ (س - س)^2 ك}{مجـ\ ك}} = \sqrt{\frac{٢٥٥٥,٢٦}{٥٠}}$$

$$= \sqrt{٥١,١١}$$

$$= ٧,١٤٨\ سم$$

الطريقة الثانيـة : (تكون أكثر ملاءة من حيث تسهيل العمليات الحسابية) .

وهناك أكثر من أسلوب لايجاد الانحراف المعيارى

١ ـ الأسلوب المباشر (باستخدام البيـانات الخـام):

وتتخلص خطوات الاسلوب المباشر فيما يلى :

١ ـ حساب مراكز الفئات (س) فى التوزيع التكرارى .

٢ ـ ضرب كل تكرار (ك) فى مركز كل فئة مناظر (س) للحصول على (س ك) ويجمع العمود (س ك) نحصل على (مجـ س ك) .

٣ ـ ضرب كل رقم فى عمود (س ك) فى الرقم المناظر له من العمود (س) مرة أخرى لنحصل على العمود ($س^2$ ك) ويجمع عناصر ذلك العمود نحصل على (مجـ $س^2$ ك) .

٤ ـ نطبق الصيغة التالية للحصول على الانحراف المعيارى بالاسلوب المباشر .

$$ع = \sqrt{\frac{مجـ\ س^2 ك}{مجـ\ ك} - \left(\frac{مجـ\ س\ ك}{مجـ\ ك}\right)^2} \quad .... (١)$$

مثـــال (١٣) أوجد الإنحـراف المعيارى فى المثال رقم (١٢) السابق بالأسلوب المباشر :

الحـــــل :

ف	ك	س	س ك	$س^2 ك$
١٢٥ـ	٦	١٢٨	٧٦٨	٩٨٣٠٤
١٣١ـ	١١	١٣٤	١٤٧٤	١٩٧٥١٦
١٣٧ـ	١٥	١٤٠	٢١٠٠	٢٩٤٠٠٠
١٤٣ـ	٢	١٤٦	١٧٥٢	٢٥٥٧٩٢
١٤٩ـ ١٥٥	٦	١٥٢	٩١٢	١٣٨٦٢٤
المجمـــوع	٥٠		٧٠٠٦	٩٨٤٢٣٦

$$ع = \sqrt{\frac{مجـ\ س^2 ك}{مجـ\ ك} - \left(\frac{مجـ\ س\ ك}{مجـ\ ك}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{٩٨٤٢٣٦}{٥٠} - \left(\frac{٧٠٠٦}{٥٠}\right)^2}$$

$$= \sqrt{١٩٦٨٤,٧٢ - (١٤٠,١٢)^2}$$

$= \sqrt{١٩٦٨٤,٧٢ - ١٩٦٣٣,٦١}$

$= \sqrt{٥١,١١}$

= ٧,١٥ سم

٢ ـ أسلوب الوسط الفرضى :

من المفضل لتسهيل العمليات الحسابية إستخدام وسط فرضى بدلاً من إستخدام الوسط الحسابى الحقيقى، كما فى الطريقة المباشرة السابقة ، حيث لا يتأثر الانحراف المعيارى ـ وباقى مقاييس التشتت الأخرى ـ لتوزيع تكرارى معين بالتحويل الناتج عن عمليات الجمع أوالطرح ، أى أن إضافة إى قيمة ثابتة أو طرحها من القيم لن تؤثر على قيمة الفروق بين هذه القيم ، ومن ثم لا تؤثر على قيمة مقياس التشتت الأصلى ـ الانحراف المعيارى هنا :

وتتلخص خطوات أسلوب الوسط الفرضى فيمايلى :

١ ـ حساب مراكز الفئات (س) فى التوزيع التكرارى .

٢ – إختيار أحد مراكز الفئات كوسط فرضى (أ) ويفضل المركز الذى يقع أمام أكبر تكرار .

٣ ـ حساب الفرق بين مركز كل فئة (س) والوسط الفرضى المختار (أ) أى (س ـ أ) وسنرمز له بالرمز (ح) .

٤ ـ بضرب الإنحراف (ح) لكل فئة فى تكرار نفس الفئة نحصل على (ح ك) وبجمع عناصر العمود (ح ك) نحصل على (مجـ ح ك) .

٥ ـ بضرب (ح ك) لكل فئة فى الانحراف لنفس الفئة (ح) نحصل على ($ح^٢$ك) وبجمع عناصر العمود ($ح^٢$ك) نحصل على مجـ($ح^٢$ك) .

٦ ـ نطبق الصيغة التالية للحصول على الانحراف المعيارى بأسلوب الوسط الفرضى .

$$ع = \sqrt{\frac{\text{مجـ ح}^2\text{ ك}}{\text{مجـ ك}} - \left(\frac{\text{مجـ ح ك}}{\text{مجـ ك}}\right)^2} \quad (٢)$$

مثـــال (١٤) : أوجد الانحراف المعيارى فى المثال رقم (١٣) السابق بأسلوب الوسط الفرضى :

ف	ك	س	(س ـ أ) ح	ح ك	ح² ك
١٢٥ـ	٦	١٢٨	١٢ـ	٧٢ـ	٨٩٤
١٣١ـ	١١	١٣٤	٦ـ	٦٦ـ	٣٩٦
١٣٧ـ	١٥	١٤٠	صفر	صفر	صفر
١٤٣ـ	٢	١٤٦	٦+	٧٢+	٤٣٢
١٤٩ـ١٥٥	٦	١٥٢	١٢+	٧٢+	٨٦٤
المجموع	٥٠	أ = ١٤٠		١٤٤+ ١٣٨ـ ٦+	٢٥٥٦

$$ع = \sqrt{\frac{٢٥٥٦}{٥٠} - \left(\frac{٦}{٥٠}\right)^2}$$

$$= \sqrt{٥١,١٢ - ٠,٠١٤}$$

$$= \sqrt{٥١,١٠٦}$$

= ٧,١٥ سم (وهى نفس النتيجه بالأسلوب المباشر)

٣ ـ أسلوب الانحرافات المختصرة :

من المفضل لتسهيل العمليات الحسابية ـ فى التوزيعات التكرارية ـ إستخدام أسلوب الانحرافات المختصرة ، حيث تختلف عمليات الضرب أو القسمة عن عمليات الجمع أو الطرح فى التأثير على مقاييس التشتت ومنها الانحراف

المعيارى ـ ذلك أن ضرب الفروق أو قسمتها على رقم ثابت (ث) سيؤثر على قيمة هذه الفروق ، وعليه فإنه اذا كان لدينا إنحراف (ح) وضربناه فى ($\frac{1}{ث}$) فإنه سينتج لنا فروق جديدة نطلق عليها الفروق المختصرة (أو المعدلة) ونرمز لها بالرمز حَ أى أن حَ = $\frac{ح}{ث}$، وعليه فإنه تتخلص خطوات الحصول على الانحراف المعيارى بأسلوب الانحرافات المختصرة فيمايلى :

(١ ، ٢ ، ٣) نفس الخطوات فى أسلوب الوسط الفرضى (السابق) .

٤ ـ بقسمة الانحراف ح على مقدار ثابت(ث) نحصل على الإنحراف المختصر (حَ) .

٥ ـ بضرب (حَ) بكل فئة فى تكرار نفس الفئة نحصل على (حَ ك) وبجمع عناصر العمود (حَ ك) نحصل على مجـ(حَ ك) .

٦ ـ بضرب (حَ ك) لكل فئة فى الإنحراف المختصر (حَ) نحصل على (حَ^{2}ك) بجمع عناصر العمود (حَ^{2}ك) نحصل على مجـ(حَ^{2}ك) .

٧ ـ نطبق الصيغة التالية ، للحصول على الإنحراف المعيارى بأسلوب الانحرافات المختصرة .

$$ع = ل \sqrt{\frac{مجـ حَ^{2}ك}{مجـ ك} - \left(\frac{مجـ حَ ك}{مجـ ك}\right)^{2}} \quad .....(٣)$$

حيث (ل) طول الفئات فى التكرار المنتظم أو ث المقدار الذى يقبل الانحرافات (ح) القسمة عليه بدون باق .

مثـال (١٥) أوجد الانحراف المعيارى فى المثال رقم (١٣) السابق بأسلوب الانحرافات المختصرة :

الحـــل :

ف	ك	س	ح	$ح' = \frac{ح}{ل}$	ح'ك	ح'^٢ك
١٢٥_	٦	١٢٨	١٢_	٢_	١٢_	٢٤
١٣١_	١١	١٣٤	٦_	١_	١١_	١١
١٣٧_	١٥	١٤٠	صفر	صفر	صفر	صفر
١٤٣_	١٢	١٤٦	٦+	١+	١٢+	١٢
١٤٩_١٥٥	٦	١٥٢	١٢+	٢+	١٢+	٢٤
المجموع	٥٠	أ = ١٤٠		ل = ٦	٢٤+ ٢٣_ ١+	٧١

$$ع = ل \sqrt{\frac{مجـ\ ح'^{٢}ك}{مجـ\ ك} - \left(\frac{مجـ\ ح'ك}{مجـ\ ك}\right)^{٢}}$$

$$= ٦ \sqrt{\frac{٧١}{٥٠} - \left(\frac{١}{٥٠}\right)^{٢}}$$

$$= ٦ \sqrt{١,٤٢ - ٠,٠٠٠٤}$$

$$= ٦ \sqrt{١,٤١٩٦}$$

$$= ٦ \times ١,١٩١$$

$$= ٧,١٤٦$$

= ٧,١٥ سـم (نفس النتيجـه بالأسلوبين المباشرة والوسط الفرضى)

خصـائص الانحـــراف المعيـارى :

١ ـ لا يتـأثر الانحـراف المعيارى ـ وباقى مـقاييس التشتت ـ لتوزيع معين بالعمليات الجبريـة الناتجـه عن عمليات الجمع والطرح بعكس مقاييس النزعة المركزيـة أى أن جمع أو طـرح قيمة معينـة الى أو من القيم الأصليـة للتوزيع، لن تؤثر على قيمة الفروق بين هذه القيم، وبالتالى لن تؤثر على قيمة تشتت التوزيع.

بينما يختلف الأمر فى حالة الضرب والقسمة فإن التشتت للتوزيع الاصلى يساوى التشتت للتوزيع الجديد × فى نفس القيمة المضروب فيها فى جميع مقاييس التشتت ما عدا التباين فإنه يضرب فى مربع هذه القيمة.

٢ ـ يؤخذ فى الاعتبار عند قياسه جميع مفردات التوزيع، ولكنه يعطى وزنا للمفردات المتطرفة بعكس نصف المدى الربيعى، من هنا كان من الأفضل استخدام نصف المدى الربيعى كمقياس للتشتت فى حالة التوزيعات شديدة الالتواء.

٣ ـ إن تمييز وحدات الانحـراف المعيارى تكون من نفس تمييز وحدات المتغير الأصلى، لذا لايمكن إستخدامه كأساس للمقارنة بين تشتت توزيعين ذات وحدات قياس مختلفة ، كالأجور والانتاج مثلاً ، فوحدة الأولى جنيه ووحدة الثانية متراً أو لتراً أو كجم أو كيلو متر أو وحدة سلعة من نوع ما ... .

٤ ـ نظراً لانه يتأثر بالوسط الحسابى لمجموعة مفردات الدراسة، لذا لايمكن استخدامه لمقارنة توزيعين من نفس النوعية لكن وسطها الحسابى مختلف، ولنفس السبب لايستخدم فى حالة التوزيعات التكرارية المفتوحة .

٥ ـ يفضل إستخدامه حين لا يكون قياس التشتت للظاهرة هو نهاية التحليل الاحصائى، بل أنه بداية لعمليات إحصائية أخرى أكثر أهمية ، ونعنى بذلك الإستنتاج الإحصائى بشقيه التقديرات الإحصائية والإختيارات الاحصائية .

٦ ـ نظراً لأنه يدخل فى تركيب معادلة التوزيع المعتدل المعيارى ، لذا يستخدم على نطاق واسع للغاية فى نظرية التقديرات ، وفى الإختيارات الإحصائية ، كما أن هناك توزيعات إحتمالية أخرى لها أهميتها مثل توزيع ذو الحدين ، وتوزيع بواسون والتى يمكن تحويل متغيرات هذه التوزيعات الى التوزيع المعتدل المعيارى والأخير بالغ الأهمية أيضاً فى حالات الاستنتاج الاحصائى .

٧ ـ ومع كل ما تقدم يعتبر الانحـراف المعيارى أفضل تقدير كمقياس للتشتت للعينات، وذلك لانه أكثر استقراراً من باقى مقاييس التشتت الأخرى، بسبب ثبات قيمته من عينة إلى أخرى من نفس المجتمع من ناحية ، ومن ناحية أخرى يعتبر الانحـراف المعيارى أحسن تقدير للتشتت الحقيقى للمجتمع الإحصائى يعد استبدال ن بـ (ن ـ ١) .

علاقات هامة بين الانحراف المتوسط ، والانحراف الربيعى ، والانحراف المعيارى فى التوزيعات التكرارية شبه المتماثله (القريبة من الإعتدال) :

أولاً : الانحراف المتوسط = $\frac{٤}{٥}$ الانحراف المعيارى

أى أن ور ور = $\frac{٤}{٥}$ σ(أو ع)

ثانياً : الانحراف الربيعى = $\frac{٢}{٣}$ الانحراف المعيارى

أى أن و و و = $\frac{٢}{٣}$ σ(أو ع)

وتترتب هذه العلاقات على خاصية التوزيع **المعتدل حيث الانحراف** المتوسط = (٠,٧٩٧٩) من الانحراف المعيارى ، كما **يكون الانحراف** الربيعى (٦٧٤٥,) من الإنحراف المعيارى .

ثانياً : مقاييس التشتت النسبى

Measures of Relative Disporsion

إذا أردنا من دراستنا للانحراف المعيارى - أو أى مقياس آخر للتشتت المطلق - مقارنة تشتت مجموعتين أو أكثر من الظواهر مختلفة فى وحدات القياس، حيث سبق أن تبين لنا إن أى مقياس من مقاييس التشتت المطلق السابقة يعبر عنه بالوحدات الأصلية للمتغير أو للظاهرة التى نقيسها، وعليه لا يمكن مقارنة إنحراف معيارى للأجور وليكن ٦ جنيهات، بانحراف معيارى لوقت الإنتاج وليكن ٦ دقائق ، ذلك أن عملية المقارنة السابقة لتشتت الظاهرتين تكون مستحيلة لأختلاف وحدات القياس فيهما، فليس من المعقول مقارنة الجنيهات بالدقائق.

وأيضاً استخدام التشتت المطلق كأساس للمقارنة قد يكون خاطئاً عند مقارنة ظاهرتين لهما نفس وحدات القياس، لكن هناك إختلاف بين كل من وسطهما الحسابى وانحرافها المعيارى.

فمثلاً : إذا كان هناك عينتين من العمال فى أحد المصانع وهما العينة (أ) والعينة (ب) وكانت بياناته كما يلى :

	العينة (أ)	العينة (ب)
$\bar{س}$ (للأجر الشهرى)	٢٥٠٠	١٥٠٠
ع (الأنحراف المعيارى للأجر الشهرى)	١٠٠	٨٠

فإن مقارنة (ع) لاجور العينتين يدعونا لأول وهلة للإعتقاد بأن تشتت الأجور فى العينية (أ) ١٠٠ جنيه أكبر من تشتت الأجور فى العينة (ب) - ٨٠ جنيه ولكن هذا الاعتقاد خاطئاً ويرجع ذلك لإختلاف الوسط الحسابى بالعينتين.

ولكن لو إستبدلنا وحدات القياس - وحدات التمييز - بأعداد مجردة من التمييز،أى ليس لها تمييز محدد من ناحية، أو فى حالة اختلاف الأوساط الحسابية لظاهرة واحدة من ناحية أخرى، فإن المقارنة تكون متاحة

وصحيحة بين الظواهر المختلفة فيماً لو إستخدمنا مقاييس للتشتت نسبية، تعرف بمعاملات الاختلاف، ونحصل عليها بقسمة مقياس للتشتت المطلق على مقياس للنزعة المركزية وضرب خارج القسمة فى (١٠٠) أى أن :

$$\text{معامل الإختلاف (التشتت النسبى)} = \frac{\text{مقياس للتشتت المطلق}}{\text{مقياس للنزعة المركزية}} \times ١٠٠$$

وسنتعرض فيما يلى لنوعين من معاملات الإختلاف :

(١) معامل الإختـــلاف المعيارى : ***Coefficient of Variation***

، ويُعرف على أنه الانحـراف المعيارى معبراً عنه كنسبـة مئويـة من الوسط الحسابى ، وبالطبع كلما كبر معامل الإختــلاف كلما دل ذلك على قوة التشتت بين مفردات توزيع الظاهرة فى حين إذا صغر معامل الإختــلاف كلما دل ذلك على ضعف التشتت بين مفردات توزيع الظاهرة .

معامل الأختـــلاف المعيـــارى : (وسنرمز له بالرمز ($م_ع$)

$$= \frac{\text{الأنحـــراف المعيـــارى}}{\text{الوســط الحســابى}} \times ١٠٠$$

$$\text{أى } (م_ع) = \frac{ع}{\bar{س}} \times ١٠٠$$

مثـــال (١٦) قارن بين التشتت فى كل من التوزيعين التكراريين التـاليين:

أولهما :

فئة الأجر	٥ ـ	١٥ ـ	٢٥ ـ	٣٥ ـ	٤٥ ـ	٥٥ ـ	٦٥ ـ ٧٥	المجموع
عدد العمال	٥	٧	١٠	١٤	٨	٤	٢	٥٠

ثانيهما :

درجة النجاح	٠ ـ	٢٠ ـ	٤٠ ـ	٦٠ ـ	٨٠ ـ ١٠٠	المجموع
عدد الطلبة	١٥	٩	٧	١٧	٢	٥٠

الحــــل : نظراً لإختلاف وحدات القياس فى الظاهرتين ، وحتى يمكن المقارنة بين التوزيعن لابد من إستخدام معامل الاختــلاف المعيارى كمايلى :

التــوزيــع التكرارى للظــاهرة الأولى :

ف	ك	س	ح	ح ك	ح^٢ك
٥ _	٥	١٠	٣٠ _	١٥٠ _	٤٥٠٠
١٥ _	٧	٢٠	٢٠ _	١٤٠ _	٢٨٠٠
٢٥ _	١٠	٣٠	١٠ _	١٠٠ _	١٠٠٠
٣٥ _	١٤	٤٠	صفر	صفر	صفر
٤٥ _	٨	٥٠	١٠ +	٨٠ +	٨٠٠
٥٥ _	٤	٦٠	٢٠ +	٨٠ +	١٦٠٠
٦٥_٧٥	٢	٧٠	٣٠ +	٦٠ +	١٨٠٠
المجموع	٥٠	أ = ٤٠		٣٩٠ _ ٢٢٠+ ١٧٠ _	١٢٥٠٠

الوسط الفرضى (أ) = ٤٠

$$\bar{س} = أ + \frac{مجـ\ ح\ ك}{مجـ\ ك}$$

$$= ٤٠ + \left(\frac{-١٧٠}{٥٠}\right)$$

= ٤٠ _ ٣,٤ = ٣٦,٦ جنيهاً .

$$ع = \sqrt{\frac{مجـ\ ح^٢ك}{مجـ\ ك} - \left(\frac{مجـ\ ح\ ك}{مجـ\ ك}\right)^٢}$$

$$= \sqrt{\frac{١٢٥٠٠}{٥٠} - \left(\frac{-١٧٠}{٥٠}\right)^{٢}}$$

$$= \sqrt{٢٥٠ - (-٣,٤)^{٢}}$$

$$= \sqrt{٢٥٠ - ١١,٥٦}$$

$$= \sqrt{٢٣٨,٤٤} = ١٥,٤٤$$ جنيهاً

معامل الإختــلاف $(م_{ع}) = \frac{ع}{\bar{س}} \times ١٠٠$

$$= \frac{١٥,٤٤}{٣٦,٦} \times ١٠٠$$

$$= ٤٢,٢\%$$

التوزيع التكرارى للظاهرة الثانيــة :

ف	ك	س	ح	ح ك	ح^{٢}ك
٠ـ	١٥	١٠	ـ ٦٠	ـ ٩٠٠	٥٤
٢٠ـ	٩	٣٠	ـ ٤٠	ـ ٣٦٠	١٤٤٠٠
٤٠ـ	٧	٥٠	ـ ٢٠	ـ ١٤٠	٢٨٠٠
٦٠ـ	١٧	٧٠	صفر	صفر	صفر
٨٠ـ ١٠٠	٢	٩٠	+ ٢٠	+ ٤٠	٨٠٠
المجموع	٥٠	أ = ٧٠		ـ ١٤٠٠ + ٤٠ ـ ١٣٦٠	٧٢٠٠٠

الوسط الفرضى (أ) = ٧٠

$$\bar{س} = أ + \frac{مجـ ح ك}{مجـ ك}$$

$$= ٧٠ + \left(\frac{-١٣٦٠}{٥٠}\right)$$

= ٧٠ − ٢٧,٢ = ٤٢,٨ درجه

$$ع = \sqrt{\frac{مجـ ح^٢ ك}{مجـ ك} - \left(\frac{مجـ ح ك}{مجـ ك}\right)^٢}$$

$$= \sqrt{\frac{٧٢٠٠٠}{٥٠} - \left(\frac{-١٣٦٠}{٥٠}\right)^٢}$$

$$= \sqrt{١٤٤٠ - ٧٣٩,٨٤}$$

$$= \sqrt{٧٠٠,١٦} = ٢٦,٤٦ \text{ درجه}$$

معامل الأختلاف المعيارى ($م_ع$) لدرجه النجاح

$$= \frac{ع}{\bar{س}} \times ١٠٠$$

$$= \frac{٢٦,٤٦}{٤٢,٨} \times ١٠٠$$

$$= ٦١,٨ \%$$

وعليه فإن الظاهرة الثانيـة ـ درجـات النجـاح ـ أكثر تشتتاً من الظاهرة الأولى ـ الأجر بالجنيـة ـ وذلك لأن مـعامل الاخـتـلاف فى الأولى (٦١,٨ ٪) أكبر من معامل الإختلاف للظاهرة الثانية (٤٢,٢ ٪).

مثــال (١٧) للمقارنــة الدقيقــة بين العينين (أ) ، (ب) ، التاليتين :

	العينـة (أ)	العينـة (ب)
$\bar{س}$ (للأجر الشهرى)	٢٥٠٠ ($\bar{س}_1$)	١٥٠٠ ($\bar{س}_2$)
ع (للأجر الشهرى)	١٠٠ ($ع_1$)	٨٠ ($ع_2$)

نظراً لأن وحدات قياس العينتين واحدة (جنيه)، ولكن هناك إختلاف بين الوسط الحسابى للأجر الشهرى بين العينتين، فإن المقارنة بين تشتت الأجر على أساس الإنحراف المعيارى المطلق لن تكون دقيقة.

فلو أخذ بالتشتت المطلق كأساس للمقارنة:

نجد أن تشتت الأجــر فى العينـة (أ) أكبر من تشتت الأجر فى العينـة (ب)

لكن لو حسبنا معامل الاختــلاف المعيارى للعينتين نجد أن :

$$(م_ع) \text{ للعينة (أ) } = \frac{ع_1}{\bar{س}_1} \times ١٠٠ = \frac{١٠٠}{٢٥٠٠} \times ١٠٠ = ٤ \%$$

$$(م_ع) \text{ للعينة (ب) } = \frac{ع_2}{\bar{س}_2} \times ١٠٠ = \frac{٨٠}{١٥٠٠} \times ١٠٠ = ٥,٣ \%$$

وتطبيقاً لمقياس التشتت النسبى فى العينتين أن التشتت للأجر فى العينة (ب) ٥,٣ ٪ أكبر من تشتت الأجر فى العينة (أ) ٤ ٪ وهو عكس النتيجـه فى حالة المقارنــة على أساس التشتت المطلق .

ويعيب المقياس النسبى السابق للتشتت (معامل الاختلاف المعيارى) مايلى :

(أ) لايمكن إيجـاد معامل الاخـتلاف المعيارى للتوزيعات التكراريـة المفتوحة ، بسبب عدم الوصول إلى عنصرى قياس هذا المعامل وهما $\bar{س}$، ع .

(ب) لايمكن ايجاد معامل الاختلاف المعيارى من الرسم البيانى .

(٢) معامل الأختلاف الربيعى *(Quartile Coefficient Variation)*

وسنرمز له بالرمز ($م_ر$) وعادة ما يستخدم فى حالة الجداول التكرارية المفتوحة أو عند إستخدام أسلوب الرسم البيانى، (لتلافى عيوب معامل الاختلاف المعيارى) :

معامل الاختـــلاف الربيعى .

$$= \frac{\text{نصف المدى الربيعى}}{\text{الوسيط}} \times ١٠٠$$

$$\text{أى } (م_ر) = \left(\frac{ر_٣ - ر_١}{٢} \div \frac{ر_٣ + ر_١}{٢} \right) \times ١٠٠$$

$$= \frac{ر_٣ - ر_١}{ر_٣ + ر_١} \times ١٠٠$$

مثال (١٨) حل المثال رقم (١٥) السابق بإستخدام معامل الإختلاف الربيعى .

الحـــل :

ف	ك	حدود الفئات	ت.م.ص	ملاحظات
١٢٥ –	٦	أقل من ١٢٥	صفر	
١٣١ –	١١	أقل من ١٣١	٦	١٢,٥ ←
١٣٧ –	١٥	أقل من ١٣٧	١٧	
١٤٣ –	١٢	أقل من ١٤٣	٣٢	٣٧,٥ ←
١٤٩ – ١٥٥	٦	أقل من ١٤٩	٤٤	
		أقل من ١٥٥	٥٠	
المجموع	٥٠			

ترتيب $(ر_{١}) = \frac{\text{مجـ ك}}{٤} = \frac{٥٠}{٤} = ١٢,٥$

قيمة $(ر_{١}) = ١٣١ + \left(\frac{١٢,٥ - ٦}{١١} \times ٦\right) = ١٣٤,٥$ سم

ترتيب $(ر_{٣}) = \frac{\text{مجـ ك}}{٤} \times ٣ = \frac{٥٠}{٤} \times ٣ = ٣٧,٥$

قيمـة $(ر_{٣}) = ١٤٣ + \frac{٣٧,٥ - ٣٢}{١٢} \times ٦ = ١٤٥,٧٥$ سم

$$(م_{ر}) = \frac{ر_{٣} - ر_{١}}{ر_{٣} + ر_{١}} \times ١٠٠$$

$$= \frac{١٤٥,٧٥ - ١٣٤,٥}{١٤٥,٧٥ + ١٣٤,٥} \times ١٠٠$$

$$= \frac{١١,٢٥}{٢٨٠,٢٥} \times ١٠٠ = ٪٤$$

مثال (١٩) فيما يلى توزيع تكرارى لأجور عدد ٢٢٠ عاملا فى الأسبوع بالجنيه فى إحدى المصانع الخاصة :

ف	أقل من ١٥	١٥–	٢٥–	٣٥–	٥٠–	٧٠–	٩٠–	١٥٠فأكثر
ك	١٠	٢٢	٢٩	٣٨	٤٢	٣٦	٢٨	١٥

والمطلوب حساب معامل الإختلاف المناسب للأجور فى ذلك المصنع

الحــــل :

حيث أن الجدول التكرارى مفتوح الطرفين ، لذا فإننا سنعتمد على معامل الإختلاف الربيعى فى حل هذا المثال :

ف	ك	حدود الفئات	ت . م . ص	ملاحظات
أقل من ١٥	١٠	أقل من الحد الأدنى	صفر	
١٥ –	٢٢	أقل من ١٥	١٠	
٢٥ –	٢٩	أقل من ٢٥	٣٢	← ٥٥
٣٥ –	٣٨	أقل من ٣٥	٦١	
٥٠ –	٤٢	أقل من ٥٠	٩٩	
٧٠ –	٣٦	أقل من ٧٠	١٤١	← ١٦٥
٩٠ –	٢٨	أقل من ٩٠	١٧٧	
١٥٠ فأكثر	١٥	أقل من ١٥٠	٢٠٥	
		أقل من الحد الأعلى	٢٢٠	
المجموع	٢٢٠			

$$\text{ترتيب } ر_1 = \frac{\text{مجـ ك}}{٤} = \frac{٢٢٠}{٤} = ٥٥$$

$$\text{قيمة } ر_1 = ٢٥ + \left(\frac{٥٥ - ٣٢}{٢٩} \times ١٠ \right)$$

= ٢٥ + ٧,٩٣ = ٣٢,٩٣ جنيها

$$\text{ترتيب } ر_3 = \frac{\text{مجـ ك}}{٤} \times ٣ = \frac{٢٢٠}{٤} \times ٣ = ١٦٥$$

$$\text{قيمة } ر_3 = ٧٠ + \left(\frac{١٦٥ - ١٤١}{٣٦} \times ٢٠ \right)$$

= ٧٠ + ١٣,٣٣ = ٨٣,٣٣ جنيها

$$(م_ر) = \frac{ر_3 - ر_1}{ر_3 + ر_1} \times ١٠٠$$

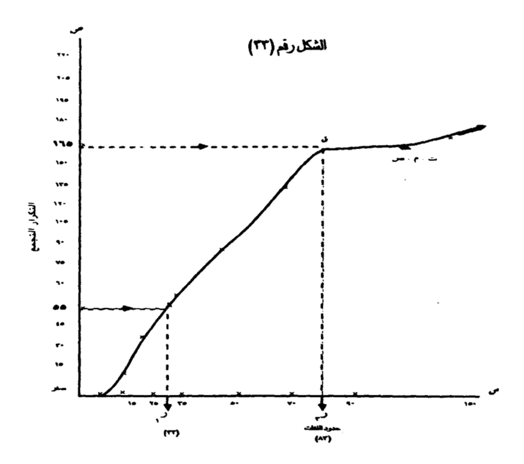
$$= \frac{٨٣,٣٣ - ٣٢,٩٣}{٨٣,٣٣ + ٣٢,٩٣} \times ١٠٠$$

$$= \frac{٥٠,٤}{١١٦,٢٦} \times ١٠٠$$

= ٤٣,٤٪

كما يلاحظ أن معامل الإختلاف الربيعى يمكن إيجاده بإستخدام أسلوب الرسم البيانى:

مثال (٢٠) حل المثال رقم (١٩) السابق بإستخدام أسلوب الرسم البيانى.



$$\text{ترتيب ر}_{١} = \frac{٢٢٠}{٤} = ٥٥$$

$$\text{ترتيب ر}_{٣} = \frac{٢٢٠}{٤} \times ٣ = ١٦٥$$

$$(\text{م ر}) = \frac{٨٣ - ٣٣}{٨٣ + ٣٣} \times ١٠٠$$

$$= \frac{٥٠}{١١٦} \times ١٠٠ = ٤٣٪$$

منحنى لورنز
Lorenz Curve[*]

يعتبر وسيله بيانيه تظهر مدى التشتت (أو الإختلاف) فى توزيع إحدى الظواهر لمجتمعين أو عينتين مختلفتين لأحدهما خاصيه الأمثليه فى التوزيع ، ويشيع إستخدام منحنى لورنز فى إظهار مدى العداله ، والمساواة فى توزيع الظواهر الإقتصاديه وخاصة ظاهرة توزيع الدخل ، وتوزيع الملكية للأراضى الزراعية بين الأفراد فى دوله ما أو بين أفراد دول مختلفه، أو لبيان أيهما أكثر عداله فى توزيع الدخل أو توزيع الملكية للأراضى الزراعيه، مقارنة بخط بيانى يطلق عليه الخط الأمثل للتوزيع ، يعكس العدالة المثلى ، وكلما بعد منحنى التوزيع الفعلى للظاهرة عن هذا الخط الأمثل للتوزيع كلما عكس ذلك البعد عن العداله أو عدم المساواة فى توزيع هذه الظاهرة والعكس كلما قرب منحنى التوزيع الفعلى للظاهرة من الخط الأمثل للتوزيع كلما دل على زياده درجه تحقيق العداله الى أن ينطبق منحنى التوزيع الفعلى للظاهرة على الخط الأمثل للتوزيع فنكون قد وصلنا إلى درجه العداله أو المساواه المثلى فى التوزيع للظاهرة موضوع الدراسة ..

ونعنى بالعداله أو المساواة فيما سبق من حيث الدخل أو الملكيه للاراضى الزراعيه هو أن الدخل ككل أو الأراضى الزراعيه ككل موزعه على كافه السكان ككل أيضا بنسب متناظرة، ونقصد بذلك أن نسبه معينه من الدخل ولتكن ٢٥ ٪ مثلا يحصل عليها ٢٥ ٪ أيضا من السكان ، وهكذا ٧٥ ٪ من الدخل يحصل عليها ٧٥ ٪ من السكان أو ٩٠ ٪ من الدخل يحصل عليها ٩٠ ٪ من السكان وهكذا الأمر بالنسبة لتوزيع ملكية الأرضى الزراعية بين الملاك كظاهرة ثانية أو لأى ظاهرة أخرى يراد معرفة وضعها التوزيعى .

(*) د . ماكس لورنز .

من كل ما تقدم يتضح لنا أن منحنى لورنز والذى يقوم على فكرة « المنحنى المجتمع الصاعد النسبى » عباره عن:

١ – محورين متعامدين أحدهما المحور السينى (س) لفئات متغير معين وليكن الدخل أو الملكيه مثلا ، يتم تقسيمه مئويا بمقياس رسم معين ، والمحور الثانى محور الصادات (ص) لمتغير آخر وليكن عددالعاملين أو عدد السكان أو عدد المالكين لأراضى زراعية، يقسم مئوياً أيضاً بنفس مقياس رسم المحور السينى .

٢ – نصل القطر الرئيسى للشكل أى النقطتين (٠ ، ٠) ، (١٠٠ ، ١٠٠)

ـ أى نقطه الأصل ، ونقطه النهايه فى الشكل ـ بخط مستقيم يصنع زاويه (٤٥°) مع المحور السينى أو المحور الصادى ، هذا الخط يطلق عليه الخط الأمثل للتوزيع . (أى الخط الذى يحقق العداله المثلى فى توزيع الظاهرة موضوع الدراسه) ، حيث أنه إذا رسم خط من النقطه ١٥ ٪ مثلا على المحور السينى (س) ، يقطع الخط الأمثل للتوزيع فى نقطه ما ولتكن (هـ) ، فإذا أسقطنا عمودا من النقطه (هـ) السابقه على محور الصادات (ص) فإنه يقطع محور الصادات عند النقطه ١٥ ٪ أيضا ، وهكذا الأمر لأى نقطه أو نسبة أخرى على محور السينات ، فتكون النسبه مناظرة تماما على محور االصادات .

٣ – نحدد المنحنى المتجمع الصاعد النسبى للمتغيرين (س ، ص) ، ونرسم منحنى لإحداثيات نقاط المنحنى المتجمع الصاعد النسبى للمتغيرين السابقين.

٤ – المساحة المحصورة بين المنحنى المتجمع الصاعد النسبى فى الخطوة السابقة، وبين الخط الأمثل للتوزيع، تعبر عن عدم العدالة أو عدم المساواة ـ أو زيادة التفاوت ـ فكلما صغرت المساحة المحصورة بينها دل ذلك على الإقتراب من العدالة فى التوزيع، والعكس صحيح.

٥ – الشكل الموضح للخطوات السابقه يطلق عليه منحنى لورنز والمثال التالى يوضح ما سبق .

مثـال (١) :

الجدول التالى يبين توزيع الأراضى الزراعيه فى مصر قبل تطبيق قانون الاصلاح الزراعى عام ١٩٥٢ حسب فئات المساحه حتى (٥٠٠٠ فدان) للفرد الواحد وعدد الملاك (بالألف) .

فئه المساحه بالفدان	ص	١ـ	٥ـ	١٠ـ	٢٠ـ	٣٠ـ	٥٠ـ	١٠٠ـ	٢٠٠ـ	٤٠٠ـ	٥٠٠٠ـ	الجمله
عدد الملاك بالألف	س	١٩٥٦	٢١٨	٩٨	٤٣	١٣	٩,٥	٥,٦	٢,٣	١,٤	٠,٢	٢٣٤٧

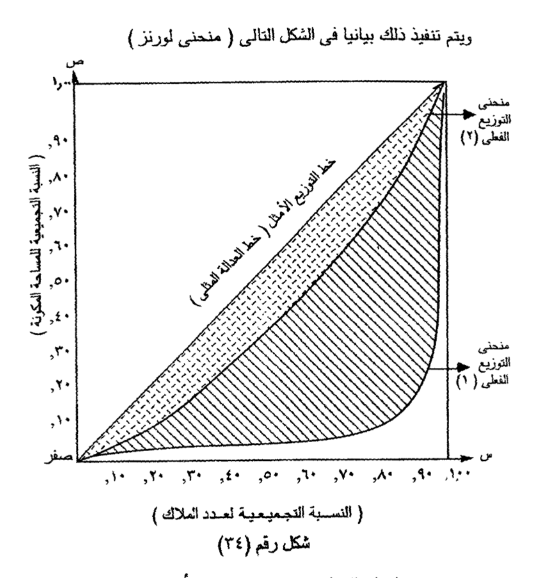
المطلوب :

اظهار مدى التفاوت ـ عدم العداله ـ فى توزيع ملكيه الأراضى الزراعيه بين الملاك بيانيا بإستخدام منحنى لورنز.

الحـــــل :

١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨
فئات المساحه بالفدان (ص)	عدد الملاك (بالالف) (س)	مركز الفئه للمتغير (ص)	جمله المساحة المملوكة (بالالف) (٢×٣)	ت . م . ص للملاك	ت . م . ص للمساحة المملوكه (بالالف) فدان	ت . م . ص النسبى للملاك %	ت . م . ص النسبى للمساحة المملوكه %
١ـ	١٩٥٦	٠,٥	٩٧٨	١٩٥٦	٩٧٨	٨٣,٣	١٢,٥
٥ـ	٢١٨	٣	٦٥٤	٢١٧٤	١٦٣٢	٩٢,٦	٣٠
١٠ـ	٩٨	٧,٥	٧٣٥	٢٢٧٢	٢٣٦٧	٩٦,٨	٤٣,٥
٢٠ـ	٤٣	١٥	٦٤٥	٢٣١٥	٣٠١٢	٩٨,٦	٥٥,٣
٣٠ـ	١٣	٢٥	٣٢٥	٢٣٢٨	٣٣٣٧	٩٩,٢	٦١,٣
٥٠ـ	٩,٥	٤٠	٣٨٠	٢٣٣٧,٥	٣٧١٧	٩٩,٦	٦٨,٣
١٠٠ـ	٥,٦	٧٥	٤٢٠	٢٣٤٣,١	٤١٣٧	٩٩,٨	٧٦
٢٠٠ـ	٢,٣	١٥٠	٣٤٥	٢٣٤٥,٤	٤٤٨٢	٩٩,٩	٨٢,٤
٤٠٠ـ	١,٤	٣٠٠	٤٢٠	٢٣٤٦,٨	٤٩٠٢	٩٩,٩٦	٩٠ـ
٥٠٠٠ـ	٠,٢	٢٧٠٠	٥٤٠	٢٣٤٧	٥٤٤٢	١٠٠,٠٠	١٠٠
الجملة	٢٣٤٧		٥٤٤٢				

ويتم تنفيذ ذلك بيانيا فى الشكل التالى (منحنى لورنز)



شكل رقم (٣٤)

ومنه يتضح إتساع المساحه بين خط التوزيع الأمثل وبين منحنى التوزيع الفعلى (١) مما يدلل على عدم العداله فى توزيع الأراضى الزراعيه قبل تطبيق قانون الاصلاح الزراعى فى مصر عام ١٩٥٢ .

وبالطبع لو أخذ التوزيع التكرارى بعد تطبيق قانون الاصلاح الزراعى الأول أو الثانى فسنجد أنه ستقل المساحة المحصورة بين منحنى التوزيع الجديد وخط التوزيع الأمثل عما هو عليه فى الشكل السابق ، أى ستزداد درجة العدالة فى توزيع الملكية الزراعية .

مثـــال (٢) :

بفرض أنه بعد صدور قانون الاصلاح الزراعى الأخير أصبح التوزيع التكرارى للملاك الجدد للأراضى الزراعية كما يلى :

فئه المساحه بالفدان	أقل من ٥	٥ـ	١٠ـ	٢٠ـ	٥٠ـ	١٠٠	المجموع
عدد الملاك (بالالف)	٢٩١٩	٨٠	٦٥	٢٦	٦	٥	٣١٠١

المطلوب :

هل حقق قانون الاصلاح الزراعى العدالة فى توزيع ملكية الأراضى الزراعية بين الأفـراد .

الحـــل :

(١) فئات الملكية (ف)	(٢) عدد الملاك (بالالاف) (ك)	(٣) مراكز فئات الملكية (س)	(٣) المساحة المملوكة بالالف فدان (٢×٣)	ت.م.ص للملاك	ت.م.ص للمساحة المملوكه	ت.م.ص النسبى للملاك %	ت.م.ص النسبى للمساحة المملوكه %
أقل من ٥	٢٩١٩	٢,٥	٧٢٩٧٥	٢٩١٩	٧٢٩٧٥	٩٤,١	٩٥,٥
٥ ـ	٨٠	٧,٥	٦٠٠	٢٩٩٩	٧٣٥٧٥	٩٦,٧	٩٦,٣
١٠ ـ	٦٥	١٥	٩٧٥	٣٠٦٤	٧٤٥٥٠	٩٨,٨	٩٧,٦
٢٠ ـ	٢٦	٣٥	٩١٠	٣٠٩٠	٧٥٤٦٠	٩٩,٦	٩٨,٨
٥٠ ـ	٦	٧٥	٤٥٠	٣٠٩٦	٧٥٩١٠	٩٩,٨	٩٩,٣
١٠٠ فدان	٥	١٠٠	٥٠٠	٣١٠١	٧٦٤١٠	١٠٠	١٠٠
المجموع	٣١٠١		٧٦٤١٠				

ويتم توقيع الرسم البيانى للتوزيع السابق فى صوره منحنى لورنز ـ على رسم التوزيع السابق فى المثال (١) نجد أن المساحه المحصوره بين منحنى

التوزيع الفعلى (٢) وخط التوزيع الأمثل قد صغرت بما يدلل على أن قانون الاصلاح الزراعى الأخير قد حقق درجة عاليه من العدالة فى توزيع الملكية للأراضى الزراعية ، وأن كان لم يحقق درجة العدالة المثلى فى توزيع الأراضى الزراعية بين الأفـراد .

تمـــارين (٥)

١ - فيما يلى مجموعـة (١٠) من طلاب السنة الثانيـة بكلية التجـارة ١٩ ، ٢٠ ، ٢١ ، ٢٣ ، ١٨ ، ٢٦ ، ٢٥ ، ٢٤ ، ٢٠ ، ٢٣

المطلـوب : حساب كل من :

أولا : (أ) المدى (ب) الانحراف المتوسط (جـ) التباين

(د) الانحراف المعيارى - لأعمار عينه الطلاب السابقة .

ثانيا : إحسب المقاييس السابقه فى (أولا) لنفس العينه من الطلاب عند تخرجهم من الكلية بفرض بقاؤهم على قيد الحياه ونجاحهم جميعا فى السنه الثالثه الرابعه بدون رسوب .

٢ - فيما يلى توزيع (٢٠٠ مصنعا) طبقا لعدد العمال الذين يعملون بكل مصنع :

فئه العمال (ف)	٣-	٥-	١٥-	٢٥-	٥٠-	١٠٠-١٠٠٠	المجموع
عدد المصانع(ك)	٣٠	٨٠	٤٠	٢٨	١٥	٧	٢٠٠

المطلوب :

(أ) حساب الانحراف المتوسط .

(ب) حساب المدى .

(جـ) حساب الانحراف الربيعى بيانيا .

(د) حساب الانحراف المعيارى .

(هـ) ايجـاد كل من :

١ - معامل الإختلاف الربيعى.

٢ - معامل الإختلاف المعيارى

٣ - فى المثـال رقم (٥) فى تمارين (٤) السابقـه ، احسب الانحـراف الربيعى للتوزيع فى عام ٩٣/٩٢ ، وفى عام ١٩٩٤/٩٣ .

٤ – أجريت دراسة لظاهرتين فأسفرت نتيجه الدراسة عما يلى :

الظاهرة الأولى : بلغ وسطها الحسابى (٨٠) وانحرافها المعيارى (٨)

الظاهرة الثانيه : كان توزيعها التكرارى كما يلى :

ف	٢٥_	٣٠_	٣٥_	٤٠_	٤٥_٥٠	المجموع
ك	١٦	٢٤	٤٢	١٠	٨	١٠٠

فأى الظاهرتين أقل تشتتا .

٥ – أوجد الانحراف المتوسط للتوزيع فى تمرين (٤) من تمارين (٤) السابقه .

٦ – فى التمرين رقم (٦) من تمارين (٤) السابقه هل يزيد الانحراف المعيارى فى الصناعة (أ) عنه فى الصناعة (ب) أم العكس .

٧ – إحسب مقياس التشتت المناسب ، ومعامل الإختلاف المناسب فى التمرين رقم (٩) من تمارين رقم (٤) السابقه .

٨ – أوجد معامل الإختلاف المعيارى للقيم فى تمرين (١٤) من تمارين (٤) السابقه .

٩ – أوجد الانحراف المتوسط ، والانحراف المعيارى لحجم الودائع فى التمرين رقم (١٨) فى تمارين (٤) السابقه .

١٠ – الجدول التالى يمثل توزيع الانفاق السنوى لعينه من الأسر المصريه فى مدينة الإسكندرية (بالألف جنيه) .

فئه الأنفاق (ف)	٣_	٥_	٧_	٩_	١١_	١٣_١٥	المجموع
عدد الأسر(ك)	١٠	٢٨	٣٧	٢٥	١٥	٥	١٢٠

إحسب كل من :

(أ) المدى (ب) نصف المدى الربيعى

(جـ) معاملات الإختلاف الممكنه .

الفصل السادس

الإلتواء والعزوم والتفرطح

مقدمة

سبق أن أوضحنا أن تلخيص بيانات أى ظاهرة فى صورة رقم واحد «المتوسطات» بأنواعها المختلفة لا تعطى صورة كاملة عن خصائص توزيع هذه الظاهرة ذلك لأنها لا تكفى لإعطاء فكرة عن درجة التجانس أو الاختلاف - التباين - بين قيم هذه الظاهرة [1]، وكان لابد أن تكون مصحوبة بقيمة أخرى تقيس لنا مدى تباعد هذه القيم أو قربها من بعضها أو من المتوسط، فكانت مقاييس التشتت والتى تعتبر مقاييس لقياس أى تجانس (تقارب) أو تشتت بيانات الظاهرة الاحصائية [2].

وبتوافر كل من مقاييس المتوسطات ومقاييس التشتت عن هذه الظاهرة فقد أتاحا وصفاً مقبولاً للتوزيع برغم ذلك فإن الوصف السابق تنقصه الدقة الكافية المطلوبة للتعرف على خواص توزيع هذه الظاهرة، مما يتطلب البحث عن مقاييس إضافية تضيف دقة أكثر للتعرف على كل خصائص توزيع مثل هذه الظاهرة.

ومن المقاييس الاحصائيه الاضافيه التى ستتعرض لها فى هذا الفصل تحقيقا للهدف السابق ، مقاييس الإلتواء والتفرطح بجانب التعرض لموضوع العزوم لنفس الهدف السابق فى الأجزاء التاليه .

الجزء الأول : الإلتــواء *Skewness*

تعريفه :

تعرضنا للالتواء بالإشارة عند دراستنا لأنواع المنحنيات التكرارية،

---

(١) إرجع إلى الفصل الرابع .

(٢) إرجع إلى الفصل الخامس .

وأوضحنا أن المنحنى التكرارى كشكل بيانى لعرض نموذجين أو أكثر من التوزيعات التكرارية فإنها تختلف فيما بينها على أساس خاصية أو أكثر من حيث **القيمة الوسطى، والتشتت، والإلتواء، التفرطح، أى أن هناك أكثر من منحنى من أهمها:**

١ – المنحنى المتماثل (المعتدل) : وهو منحنى تكرارى ـ متماثل (غير ملتوى) له محور رأسى يمر بنقطة النهايه العظمى للتوزيع ويقسم التوزيع ومن ثم المنحنى إلى جزئين متطابقين تماماً،وفيه يكون تزايد أو تناقص التكرارات متشابها ومنتظما بطريقه متماثله على جانبى المحور الرأسى،وفيه يكون الوضع النسبى للمتوسطات :

الوسط الحسابى (س) = الوسيط ($ر_٢$) = المنوال (م)

كما أن فيه الالتواء = صفر

٢ – المنحنى التكرارى غير المتماثل (الملتوى) : وهو منحنى يختلف عن المنحنى المتماثل فى أن طرفيه غير متماثلين بل مختلفين، وفيه يكون تزايد أو تناقص التكرارات بشكل غير منتظم على جانبى المحور الرأسى عند وسط التوزيع ، وقد يكون الإلتواء سالبا أو موجبا ويكون الوضع النسبى للمتوسطات فيه .

$\bar{س} \neq ر_٢ \neq م$ وسنفرق هنا بين :

(أ) منحنى ملتوى إلى اليسار (ذات التواء سالب Negatively Skewed) وتميل فيه التكرارات الكبيرة إلى التركز عند فئات التوزيع العليا ، ويمتد ذيل المنحنى التكرارى فيه إلى اليسار ويكون الوضع النسبى للمتوسطات فيه

$\bar{س} < ر_٢ < م$

(أى أن قيمة الوسط الحسابى أصغر القيم المتوسطة والمنوال هو أكبرها)

(ب) منحنى ملتوى إلى اليمين (ذات التواء موجب Positively skewed) وتميل فيه التكرارات الكبيرة إلى التركز عند فئات التوزيع الدنيا، ويمتد ذلك المنحى التكرارى فيه إلى اليمين ويكون الوضع النسبى للمتوسطات فيه (س > $ر_٢$ > م) أى أن الوسط الحسابى أكبر القيم

المتوسطة والمنوال أصغرها ويتضح ما تقدم من الأشكال رقم (٢٩، ٣٠، ٣١) [*].

مما تقدم يمكن تعريف الالتواء بأنه « هو مدى إبتعاد التوزيع التكرارى وبالتالى المنحنى التكرارى عن التوزيع المتماثل (الطبيعى)، أو بمعنى آخر إنعدام التماثل فى التوزيع التكرارى ذلك لأن وجود الالتواء يعنى عدم إنتظام مفردات التوزيع حول الوسط الحسابى لهذا التوزيع أى عدم إنتظام حجم العناصر التى تقع قبل وبعد المتوسط ».

ومن التوزيعات ما يكون إلتواؤه معتدلاً أو حاداً، هذا بجانب الالتواء الموجب والالتواء السالب.

ويمكننا الوقوف على طبيعة ودرجة إلتواء أى توزيع تكرارى بمجرد النظر إلى شكله البيانى، أو بالحصول على القيمة المطلقة للإلتواء، ولكن نظراً لأنه قد يتطلب الأمر مقارنة توزيعين تكراريين ذات وحدات قياس مختلفة، هذا وقد يتساوى كل من المتوسط والانحراف المعيارى فى توزيعين تكراريين من وحدات قياس واحدة لكنهما يختلفان من حيث الإلتواء، كما قد تتساوى درجة التواؤهما ولكنهما يختلفان فى الإشارة، أو قد يكون التواؤهما فى اتجاه واحد ولكن لقيمتين مختلفتين، لذا كان القياس الكمى النسبى لدرجة الالتواء من خلال معادلة محددة، يمكن أن يعطى تصوراً أدق لدرجة هذا الالتواء.

لكل ما سبق فإنه يمكن إختبار قياس درجة الالتواء لأى توزيع تكرارى من خلال أكثر من طريقة، وسنرمز للالتواء بالرمز (ت):

٢ - أنواع مقاييس الالتواء:

(أ) مقاييس الإلتواء المطلقة (تهتم بالدرجة الأولى ببعض إختبارات وجود الالتواء من عدمه) ومن أهمها:

أولاً: يمثل الفرق بين مقياسين من مقاييس المتوسطات الثلاثة (الوسط الحسابى والوسيط والمنوال) فإذا كانت:(ت):

(١) سَ - م = صفر

(١) عند دراسة العلاقة بين المتوسطات بالفصل الرابع.

أى ينعدم الالتواء ويكون التوزيع متماثلا :

لكن لو كانت (ت) :

(٢) $\bar{س} - م \neq$ **صفر وهنا قد يكون (ت):**

$\bar{س} - م >$ صفر فيكون الالتواء موجب (إى التواء إلى اليمين)

أو $\bar{س} - م <$ صفر فيكون الالتواء سالب (إى التواء إلى اليسار)

ثانياً : يمثل الفرق بين كلا من الربيع الأعلى ($ر_٣$) ، والربيع الأدنى ($ر_١$) الوسيط ($ر_٢$) حيث أنه اذا كان :

$ر_٣ - ر_٢ = ر_٢ - ر_١$ (**ينعدم الالتواء أى تكون ت = صفر**)

لكن اذا كانت :

$ر_٣ - ر_٢ \neq ر_٢ - ر_١$ **(فيكون هناك التواء أى وأن (ت) قد تكون موجبة أو سالبة).**

لكن سبق أن أوضحنا أن مقاييس الالتواء المطلقه رغم بساطتها لكن يعيبها صعوبه وخطأ استخدامها فى المقارنه بين توزيعين أو أكثر مختلفين فى وحدات القياس ... الخ ؛ كما أوضحنا فيما سبق (فانه يقتصر استخدامها عند اعطاء فكره مبسطه عن درجه الالتواء لظاهره ما بمعزل عن الظواهر الاخرى) لذا كان من الأفضل أن نحصل على مقياس للالتواء يمكن إستخدامه فى المقارنه بين توزيعين أو أكثر مختلفين أو مختلفة فى وحدات القياس، فظهرت فكرة المقاييس النسبيه للالتواء أو معاملات الالتواء .

(ب) مقاييس الالتواء النسبيه (أو معاملات الالتواء)

أولا : معاملات بيرسون للإلتواء (وتصلح لجميع التوزيعات التى يمثل الوسط الحسابى نقطه التركز فيها)

١ – معامل الالتواء النسبى باستخدام المنوال وسنرمز له بالرمز ($ت_١$) :

$$\text{معامل الالتواء } (ت_١) = \frac{\bar{س} - م}{ع} \quad ....(١)$$

وفيه تم قسمه الفرق بين (الوسط الحسابى ــ المنوال) أى الفرق المطلق بينهما على الانحراف المعيارى (ع) وذلك لأن الانحراف المعيارى مقياس لمدى إبتعاد القيم عن وسطها الحسابى .

لكن يعيب المقياس السابق للالتواء إعتماده على المنوال (م) وهو مقياس غير دقيق كما سبق أن أوضحنا فى الفصل الرابع ـ لذا فقد توصل بيرسون إلى مقياس آخر يعتمد على الوسيط ($ر_٢$) بدلا من المنوال (م) . سنرمز له بالرمز ($ت_٢$) بعد الاستفادة من العلاقة التالية:

$$\bar{س} - م = ٣ (\bar{س} - ر_٢)$$

$$\text{معامل الالتواء } (ت_٢) = \frac{٣ (\bar{س} - ر_٢)}{ع} \quad ....(٢)$$

وبالطبع فإن ($ت_١$) يختلف بعض الشيء عن ($ت_٢$) ذلك لكون العلاقة بين المقياسين علاقه تقريبيه ، وان كان من المفضل إستخدام العلاقه الثانيه ($ت_٢$) فى التوزيعات القريبه من التماثل ، وفى كلا المقياسين لبيرسون فإن (ت) تتراوح عادة ما بين (ــ٣ ، +٣) .

ثانيا : معامل باولى (Bowely) للالتواء وسنرمز له بالرمز ($ت_٣$)؛وهو يصلح فى حالة التوزيعات التى يكون الوسيط أصلح وأنسب فى تمثيلها ومن أهمها التوزيعات المفتوحه .

ويقوم على قياس الفرق بين الربعين الأعلى والأدنى والوسيط ـ كما أوضحنا فى مقاييس الالتواء المطلقه عاليه .

وتتوقف هنا درجه الالتواء فى التوزيع ونوعه على قيمة الفرق بين ($ر_٣ - ر_٢$) ، ($ر_٢ - ر_١$) ، وحتى يكون هذا الفرق نسبيا وليس مطلقا حتى يصلح للمقارنة فقد تم قسمته على مجموع المسافة بين كل من الربيعين والوسيط، أى على الانحراف الربيعى.

$$\text{معامل الالتواء} (ت_٣) = \frac{(ر_٣ - ر_٢) - (ر_٢ - ر_١)}{(ر_٣ - ر_١)} \quad \text{.....} (٣)$$

أو بصيغه أخرى :

$$(ت_٣) = \frac{(ر_٣ - ٢ ر_٢ + ر_١)}{ر_٣ - ر_١}$$

وعادة ما يأخذ المعامل السابق قيمه تتراوح بين (ـ ١ ، + ١) .

ويجب أن ننوه هنا أنه لإختلاف النتيجة التى نحصل عليها من مقاييس بيرسون للالتواء عنه فى مقياس باولى للالتواء، فإنه من الخطأ إستخدامهما لمقارنة التواء توزيعين تكراريين، ولكن يجب الاقتصاد على إستخدام أحدهما فقط لمقارنة التواء هذين التوزيعين.

مثـــال (١) :

إحسب من التوزيع التكرارى التالى كل من معاملات بيرســون للالتــواء ($ت_١$ ، $ت_٢$) ، ومعامل بأولى للالتواء ($ت_٣$):

فئه الطول (ف)	١٢٥ـ	١٣١ـ	١٣٧ـ	١٤٣ـ	١٤٩ـ١٥٥	المجموع
عدد التلاميذ (ك)	٦	١١	١٥	١٢	٦	٥٠

الحـــــل :

حلول هذا التوزيع التكرارى ص ١١٤ ، ص ١٢٨ ، ص ١٣٦ ، ص١٤٧ ، ص ٢٠١ نجـد أن :

$\bar{س}$ = ١٤٠,١٢ سم ، $ر_٢$ = ١٤٠,٢ سم ، $ر_١$ = ١٣٤,٥ سم ،

$ر_٣$ = ١٤٥,٧٥ سم ، م = ١٤٠,٤٣ سم ، ع = ٧,١٥ سم

وعليه فإن :

$$\therefore \text{ت}_1 = \frac{\bar{\text{س}} - \text{م}}{\text{ع}}$$

$$\therefore \text{ت}_1 = \frac{١٤٠,١٢ - ١٤٠,٤٣}{٧,١٥} = \frac{-٠,٣١}{٧,١٥} = (-٠,٠٤٣)$$

أى أن الالتواء بسيط وإلى اليسار.

$$\text{،} \therefore \text{ت}_2 = \frac{٣(\bar{\text{س}} - \text{ر}_2)}{\text{ع}}$$

$$\therefore \text{ت}_2 = \frac{٣(١٤٠,١٢ - ١٤٠,٢)}{٧,١٥} = \frac{٣(-٠,٠٨)}{٧,١٥}$$

$$= \frac{-٠,٢٤}{٧,١٥} = (-٠,٠٣٣)$$

أى أن الالتواء هنا بسيط وإلى اليسار أيضا .

$$\text{،} \therefore \text{ت}_3 = \frac{\text{ر}_3 - ٢\text{ر}_2 + \text{ر}_1}{\text{ر}_3 - \text{ر}_1}$$

$$\therefore \text{ت}_3 = \frac{١٤٥,٧٥ - ٢(١٤٠,٢) + ١٣٤,٥}{١٤٥,٧٥ - ١٣٤,٥}$$

$$= \frac{١٤٥,٧٥ - ٢٨٠,٤ + ١٣٤,٥}{١١,٢٥}$$

$$= \frac{٢٨٠,٢٥ - ٢٨٠,٤}{١١,٢٥} = \frac{-٠,١٥}{١١,٢٥}$$

$$= (-٠,٠١٣)$$

أى أن الالتواء بسيط جدا وإلى اليسار .

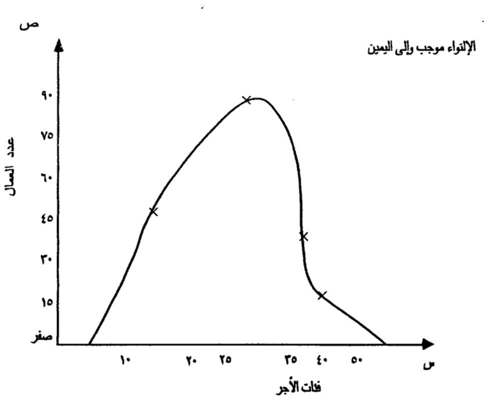
مثـال (٢) :

إختبرو إحسب باستخدام طرق ومعاملات الالتواء المناسبة من قيم واتجاه الالتواء من التوزيع التكرارى التالى بيانياً وحسابياً:

فئات الأجر (ف)	١٠ـ	٢٠ـ	٢٥ـ	٣٥ـ	٤٠ـ ٥٠	المجموع
عدد العمال (ك)	٥٠	٢٠	٨٠	٣٠	٢٠	٢٠٠

الحـــل :

أولا : نوع الالتواء بيانيا :



شكل رقم (٣٥)

ثانياً : معاملات الالتواء لبيرسون (ت ١ ، ت ٢) حسابياً :

ف	ك	س	س ك	ك̄	س٢ ك	حدود الفئات	ت . م . ص
١٠ـ	٥٠	١٥	٧٥٠	٥	١١٢٥٠	أقل من ١٠	صفر
٢٠ـ	٢٠	٢٢,٥	٤٥٠	Δ_1 = ٤	١٠١٢٥	أقل من ٢٠	٥٠
٢٥ـ	٨٠	٣٠	٢٤٠٠	٨	٧٢٠٠٠	أقل من ٢٥	٧٠
٣٥ـ	٣٠	٣٧,٥	١١٢٥	Δ_2 = ٦	٤٢١٨٧,٥	أقل من ٣٥	١٥٠
٤٠ـ٥٠	٢٠	٤٥	٩٠٠	٢	٤٠٥٠٠	أقل من ٤٠	١٨٠
						أقل من ٥٠	٢٠٠
المجموع	٢٠٠		٥٦٢٥		١٧٦٠٦٢,٥		

$\bar{س} = \frac{٥٦٢٥}{٢٠٠} = ٢٨,١٢٥$ جنيها

$م = ٢٥ + (\frac{٤}{٤ + ٢} \times ٥)$ (بالتطبيق على التكرار المعدل)

$= ٢٥ + \frac{٢٠}{٦}$

$= ٢٥ + ٣,٣٣ = ٢٨,٣٣$ جنيها

ترتيب $ر_٢ = \frac{مجـ ك}{٢} = \frac{٢٠٠}{٢} = ١٠٠$

قيمة $ر_٢ = ٢٥ + \frac{١٠٠ - ٧٠}{٨٠} \times ١٠$

$= ٢٥ + \frac{٣٠}{٨٠} \times ١٠$

$$= ٢٥ + ٣,٧٥$$

$$= ٢٨,٧٥ \text{ سم}$$

$$ع = \sqrt{\frac{\text{مجـ س}^{٢}\text{ ك}}{\text{مجـ ك}} - \left(\frac{\text{مجـ س ك}}{\text{مجـ ك}}\right)^{٢}}$$

$$= \sqrt{\frac{١٧٦٠٦٢,٥}{٢٠٠} - \left(\frac{٥٦٢٥}{٢٠٠}\right)^{٢}}$$

$$= \sqrt{٨٨٠,٣١٣ - ٨٠٢,٥٨٩}$$

$$= \sqrt{٧٧,٧٢٤} = ٨,٨١٦$$

$$\therefore ت_{١} = \frac{\bar{س} - م}{ع}$$

$$\therefore ت_{١} = \frac{٢٨,١٢٥ - ٢٨,٣٣٠}{٨,٨١٦}$$

$$= \frac{-٠,٢٠٥}{٨,٨١٦} = -٠,٠٢٣$$ (التواء بسيط جداً وسالب)

$$\therefore ت_{٢} = \frac{٣ (\bar{س} - ر_{٢})}{ع}$$

$$\therefore ت_{٢} = \frac{٣ (٢٨,١٢٥ - ٢٨,٧٥)}{٨,٨١٦}$$

$$= \frac{٨٤,٣٧٥ - ٨٦,٢٥}{٨,٨١٦}$$

$$= \frac{-1,875}{8,816} = (-0,213) \text{ (التواء بسيط وسالب)}$$

مثال (٣):

إحسب معامل التواء مناسب من الجدول التكرارى التالى :

ف	أقل من ١٠	١٠ ـ	٢٠ ـ	٣٠ ـ	٤٠ ـ	٥٠ ـ	٦٠ ـ	٧٠ فأكثر	المجموع
ك	٢١٠	٢٠٠	٢١٥	١٢٠	١١٥	١١٠	١٨	١٢	١٠٠٠

الحـــل :

حيث أن الجدول مفتوح فيفضل معامل باولى للالتواء حيث

$$ت_٣ = \frac{ر_٣ - ٢ ر_٢ + ر_١}{ر_٣ - ر_١}$$

وعليه للحصول على عناصر المعادله السابقه ننشئ جدول تكرارى متجمع صاعد كما يلى :

ف	ك	حـدود الفئـات	ت . م ص	
١٠ ـ	٢١٠	أقل من الحد الأدنى	صفر	
١٠ ـ	٢٠٠	أقل من ١٠	٢١٠	← ٢٥٠
٢٠ ـ	٢١٥	أقل من ٢٠	٤١٠	
٣٠ ـ	١٢٠	أقل من ٣٠	٦٢٥	
٤٠ ـ	١١٥	أقل من ٤٠	٧٤٥	← ٧٥٠
٥٠ ـ	١١٠	أقل من ٥٠	٨٦٠	
٦٠ ـ	١٨	أقل من ٦٠	٩٧٠	
٧٠ ـ	١٢	أقل من ٧٠	٩٨٠	
		أقل من الحد الأعلى	١٠٠٠	
المجموع	١٠٠٠			

ترتيب $ر_{٢} = \frac{\text{مجـ ك}}{٢} = \frac{١٠٠٠}{٢} = ٥٠٠$

قيمه $ر_{٢} = ٢٠ + \frac{٥٠٠ - ٤١٠}{٢١٥} \times ١٠$

$= ٢٤,١٩$

ترتيب $ر_{١} = \frac{\text{مجـ ك}}{٤} = \frac{١٠٠٠}{٤} = ٢٥٠$

قيمه $ر_{١} = ١٠ + \frac{٢٥٠ - ٢١٠}{٢٠٠} \times ١٠$

$= ١٢$

ترتيب $ر_{٣} = \frac{\text{مجـ ك}}{٤} \times ٣ = \frac{١٠٠٠}{٤} \times ٣ = ٧٥٠$

قيمة $ر_{٣} = ٤٠ + \frac{٧٥٠ - ٧٤٥}{١١٥} \times ١٠$

$= ٤٠,٤٣$

∴ معامل التواء ($ت_{٣}$) $= \frac{ر_{٣} - ٢ ر_{٢} + ر_{١}}{ر_{٣} - ر_{١}}$

∴ $ت_{٣} = \frac{٤٠,٤٣ - ٢ \times ٢٤,١٩ + ١٢}{٤٠,١٣ - ١٢}$

$= \frac{٥٢,١٣ - ٤٨,٣٨}{٢٨,١٣}$

$= \frac{٤,٠٥}{٢٨,١٣} = + ٠,١٤٢$ (التواء بسيط وموجب)

الجزء الثانى

العـــــــزوم

Moments

إن عرض فكره سريعه عن العزوم فى هذا الجزء، سيضيف تحليلات جديده ستساعد فى قياس خصائص التوزيعات التكراريه كلها وبصفه خاصه فى كل من خاصيتى الإلتواء والتفرطح .

١ـ تعريفها وطرق تقديرها :

إن العزم لأى قوة هو مقدار العمل الذى تحدثه هذه القوة ، ويتوقف ذلك العمل على عنصرين هما ، القوة نفسها ، والمسافه بين هذه القوة والنقطة التى عندها تحدث أثرها ، ذلك أن قوة مقدارها (٨ كيلو جرام) على بعد (متر واحد) تعادل فى مفعولها قوة أخرى مقدارها (٢كيلو جرام) على بعد (٤ أمتار) فطبقا لقانون الرافعة [١] يتحقق التعادل (أو التوازن) عند تساوى طرفى هذا القانون .

ووفقاً للأساس السابق فإنه بالنسبة للتوزيعات التكرارية، فإن تكرارات أى توزيع تكون هى القوة المؤثرة عليه، وبالتالى عزوم أى تكرارات تقاس بحاصل ضرب هذه التكرارات فى إنحرافاتها عن نقطة معينة، وقد تكون هذه النقطة هى نقطة الوسط الحسابى، أو نقطة الصفر، أو عند قيمة ثابتة أخرى، مقسوماً على تلك التكرارات وعليه فإن:

قيمة العزم عباره عن متوسط إنحرافات قيم التوزيع عن هذه النقطه المحدده فيما سبق ، وتتحدد رتبه هذا العزم بدرجه القوة (الأس) التى ترفع إليها هذه الإنحرافات وعليه فالقاعده العامه للعزم النونى مثلا :

---

(١) القوة × زراعها = المقاومة (القوة الأخرى) × زراعها

$$\text{العزم النونى} = \frac{\text{مجـ}(\text{س} - \text{النقطة})^{\text{ن}}}{\text{ن}}$$

حيث أن :

(١) س : هى القيم أو مراكز فئات التوزيع .

(٢) النقطه : قد تكون هى :

(أولا) نقطه الصفر .(يطلق على العزوم فى هذه الحالة بالعزوم الصفريه)

(ثانيا) الوسط الحسابى ($\bar{س}$ أو U) (ويطلق على العزوم فى هذه الحالة بالعزوم المركزيه)

(ثالثاً) أى نقطة أخرى تختلف عما سبق فى أولاً، وثانياً ولتكن النقطة (أ)، (يطلق على العزوم فى هذه الحالة بالعزوم العامة) .

ومن الناحيه العمليه ـ فى هذا الجزء ـ فإن القياسات الإضافيه التى سنحتاج إليها ستقتصر على العزوم من العزم الأول حتى العزم الرابع ، لذا سنورد فيما يلى صيغه تقدير كل عزم منها فى حالتين :

أولهما : حالة البيانات غير المبوبة (المفردة) .

ثانيهما : حالة البيانات المبوبة (التوزيعات التكرارية) وذلك بالنسبة لكل نقطة من النقاط المشار إليها فى (أولاً)، (ثانياً)، (ثالثاً) فيما سبق.

أولا : العزوم حول الصفر (العزوم الصفريه) وسنرمز لها بالرمز (مـ)

(أ) لبيانات غير مبوبة (مفردة) .

وسنرمز للعزوم بصفة عامة بالرمز ($ز_م$) ، ($ز_و$) أو ($ز_أ$) على حسب نوع النقطة التى يحسب عندها العزوم.

$$\text{العزم الأول : } ز_م(1) = \frac{\text{مجـ س}}{\text{ن}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$\text{العزم الثانى : } ز_م(2) = \frac{\text{مجـ س}^2}{\text{ن}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

العزم الثالث : $ز م_{(3)} = \frac{\text{مجـ س}^{3}}{\text{ن}}$ .... (٣)

العزم الرابع : $ز م_{(4)} = \frac{\text{مجـ س}^{4}}{\text{ن}}$ .... (٤)

حيث س هى قيم التوزيع للبيانات غير المبوبة.

(ب) لبيانات مبوبة (توزيعات تكراريه)

حيث : س : هى قيم مراكز الفئات ، ك هى تكرار كل فئه .

العزم الأول : $ز م_{(1)} = \frac{\text{مجـ س ك}}{\text{مجـ ك}}$ .... (٥)

العزم الثانى : $ز م_{(2)} = \frac{\text{مجـ س}^{2}\text{ ك}}{\text{مجـ ك}}$ .... (٦)

العزم الثالث : $ز م_{(3)} = \frac{\text{مجـ س}^{3}\text{ ك}}{\text{مجـ ك}}$ .... (٧)

العزم الرابع : $ز م_{(4)} = \frac{\text{مجـ س}^{4}\text{ ك}}{\text{مجـ ك}}$ .... (٨)

مثـال (٤) :

أوجد العزوم من الأول حتى الرابع (حول الصفر) لدرجات (٨) طلاب فى مادة ما حيث كانت هذه الدرجات كما يلى :

٢ ، ٤ ، ٤ ، ٧ ، ٨ ، ١٠ ، ٢٠ ، ٢٥

الحـل :

ترتيب الطلاب	س (الدرجات)	$س^2$	$س^3$	$س^4$
١	٢	٤	٨	١٦
٢	٤	١٦	٦٤	٢٥٦
٣	٤	١٦	٦٤	٢٥٦
٤	٧	٤٩	٣٤٣	٢٤٠١
٥	٨	٦٤	٥١٢	٤٠٩٦
٦	١٠	١٠٠	١٠٠٠	١٠٠٠٠
٧	٢٠	٤٠٠	٨٠٠٠	١٦٠٠٠٠
٨	٢٥	٦٢٥	١٥٦٢٥	٣٩٠٦٢٥
المجموع	٨٠	١٢٧٤	٢٥٦١٦	٥٦٧٦٥٠

وتكون العزوم الصفريه كما يلى :

$$\dot{ز}\,م_{(١)} = \frac{مجـ\ س}{ن} = \frac{٨٠}{٨} = ١٠$$

$$\dot{ز}\,م_{(٢)} = \frac{مجـ\ س^{٢}}{ن} = \frac{١٢٧٤}{٨} = ١٥٩,٢٥$$

$$\dot{ز}\,م_{(٣)} = \frac{مجـ\ س^{٣}}{ن} = \frac{٢٥٦١٦}{٨} = ٣٢٠٢$$

$$\dot{ز}\,م_{(٤)} = \frac{مجـ\ س^{٤}}{ن} = \frac{٥٦٧٦٥٠}{٨} = ٧٠٩٥٦,٢٥$$

(لاحظ فيما سبق تعقد العمليات الحسابية وكبر أرقامها اذا كانت س = عدد صحيح وكسر)

مثال (٥) :

فيما يلى توزيع تكرارى لعدد ١٠٠ طالب طبقاً لمتوسط الدرجات التى حصلوا عليها فى ٨ مواد مختلفة.

س (الدرجات)	٢	٤	٤	٧	٨	١٠	٢٠	٢٥
ك (عدد الطلاب)	٣	٨	١٥	١٠	١٠	٣٥	١٤	٥

والمطلوب: حساب كل من العزم الأول حتى العزم الرابع (حول الصفر) للتوزيع التكرارى السابق.

الحــــل :

س	ك	س ك	س ^{2} ك	س ^{3} ك	س ^{4} ك
٢	٣	٦	١٢	٢٤	٤٨
٤	٨	٣٢	١٢٨	٥١٢	٢٠٤٨
٤	١٥	٦٠	٢٤٠	٩٦٠	٣٨٤٠
٧	١٠	٧٠	٤٩٠	٣٤٣٠	٢٤٠١٠
٨	١٠	٨٠	٦٤٠	٥١٢٠	٤٠٩٦٠
١٠	٣٥	٣٥٠	٣٥٠٠	٣٥٠٠٠	٣٥٠٠٠٠
٢٠	١٤	٢٨٠	٥٦٠٠	١١٢٠٠٠	٢٢٤٠٠٠٠
٢٥	٥	١٢٥	٣١٢٥	٧٨١٢٥	١٩٥٣١٢٥
المجموع	١٠٠	١٠٠٣	١٣٧٣٥	٢٥١١٧١	٤٩٣٤٠٣١

وتكون العزوم حول الصفر كما يلى : حيث مجـ ك = (١٠٠).

$$زم_{(1)} = \frac{١٠٠٣}{١٠٠} = ١٠,٠٣$$

$$زم_{(2)} = \frac{١٣٧٣٥}{١٠٠} = ١٣٧,٣٥$$

$$زم_{(3)} = \frac{٢٥١١٧١}{١٠٠} = ٢٥١١,٧١$$

$$زم_{(4)} = \frac{٤٩٣٤٠٣١}{١٠٠} = ٤٩٣٤٠,٣١$$

ثانيا : العزوم حول الوسط الحسابى (العزوم المركزية) وسنرمز لها بالرمز (زم) :

أ – لبيانات غير مبوبة (مفردة)

$$\text{العزم الأول :}\ زم_{(1)} = \frac{\text{مجـ}(س - \bar{س})}{ن} = \frac{\text{مجـ}\ ح}{ن} \quad ..\ (٩)$$

$$\text{العزم الثانى :}\ زم_{(2)} = \frac{\text{مجـ}(س - \bar{س})^{2}}{ن} = \frac{\text{مجـ}\ ح^{2}}{ن} \quad ..\ (١٠)$$

$$\text{العزم الثالث :}\ زم_{(3)} = \frac{\text{مجـ}(س - \bar{س})^{3}}{ن} = \frac{\text{مجـ}\ ح^{3}}{ن} \quad ..\ (١١)$$

$$\text{العزم الرابع :}\ زم_{(4)} = \frac{\text{مجـ}(س - \bar{س})^{4}}{ن} = \frac{\text{مجـ}\ ح^{4}}{ن} \quad ..\ (١٢)$$

(ب) لبيانات مبوبه (توزيعات تكرارية)

$$زم_{(1)} = \frac{\text{مجـ}\ ك(س - \bar{س})}{\text{مجـ}\ ك} = \frac{\text{مجـ}\ ح\ ك}{\text{مجـ}\ ك} \quad ....(١٣)$$

$$ز_{م(٢)} = \frac{مجـ ك (س - \bar{س})^{٢}}{مجـ ك} = \frac{مجـ ح^{٢} ك}{مجـ ك} \quad ....(١٤)$$

$$ز_{م(٣)} = \frac{مجـ ك (س - \bar{س})^{٣}}{مجـ ك} = \frac{مجـ ح^{٣} ك}{مجـ ك} \quad ....(١٥)$$

$$ز_{م(٤)} = \frac{مجـ ك (س - \bar{س})^{٤}}{مجـ ك} = \frac{مجـ ح^{٤} ك}{مجـ ك} \quad ....(١٦)$$

حيث (س) مراكز الفئات للتوزيع ، ($\bar{س}$) الوسط الحسابى للتوزيع ، مجـ ك (مجموع التكرارات) للتوزيع، وأن (س ـ $\bar{س}$) = ح (الانحراف عن الوسط الحسابى)

مثال (٦) :

أوجد كلا من العزوم المركزية ($ز_م$) من الأول حتى الرابع لدرجات ٨ طلاب التالية فى مادة ما :

٢ ، ٤ ، ٤ ، ٧ ، ٨ ، ١٠ ، ٢٠ ، ٢٥

الحـل :

$$\bar{س} = \frac{مجـ س}{ن} = \frac{٨٠}{٨} = ١٠$$

$$\therefore ز_{م(١)} = \frac{مجـ (س - \bar{س})}{ن} = \frac{مجـ ح}{ن}$$

وحيث أن :

$$مجـ ح = ح_١ + ح_٢ + ح_٣ + ح_٤ + ح_٥ + ح_٦ + ح_٧ + ح_٨$$

مجـ ح = (٢ـ١٠) + (٤ـ١٠) + (٤ـ١٠) + (٧ـ١٠) + (٨ـ١٠)
+ (١٠ـ١٠) + (٢٠ـ١٠) + (٢٥ـ١٠)

= (ـ٨) + (ـ٦) + (ـ٦) + (ـ٣) + (ـ٢) + (صفر) + (+١٠) + (١٥)

= (ـ ٢٥) + (+٢٥) = صفر

$\because$ زم $_{(1)}$ = $\frac{\text{مجـ صفر}}{8}$ = صفر

$\because$ زم $_{(2)}$ = $\frac{\text{مجـ } (\text{س} - \bar{\text{س}})^2}{\text{ن}}$ = $\frac{\text{مجـ ح}^2}{\text{ن}}$

وحيث أن مجـ ح^2 :

= ح$_1^2$ + ح$_2^2$ + ح$_3^2$ + ح$_4^2$ + ح$_5^2$ + ح$_6^2$ + ح$_7^2$ + ح$_8^2$

$\because$ مجـ ح^2 = ٦٤ + (٣٦) + (٣٦) + (٩) + (٤) + (صفر) + (١٠٠) + (٢٢٥)

= ٤٧٤

$\because$ زم $_{(2)}$ = $\frac{474}{8}$ = ٥٩,٢٥

$\because$ زم $_{(3)}$ = $\frac{\text{مجـ } (\text{س} - \bar{\text{س}})^3}{\text{ن}}$ = $\frac{\text{مجـ ح}^3}{\text{ن}}$

وحيث أن مجـ ح^3 :

= ح$_1^3$ + ح$_2^3$ + ح$_3^3$ + ح$_4^3$ + ح$_5^3$ + ح$_6^3$ + ح$_7^3$ + ح$_8^3$

$\because$ مجـ ح^3 = (-٥١٢) + (-٢١٦) + (-٢١٦) + (-٢٧) + (-٨)

+ (صفر) + (١٠٠٠) + (٣٣٧٥)

= (-٩٧٩) + (٤٣٧٥)

= (+ ٣٣٩٦)

$\because$ زم $_{(3)}$ = $\frac{3396}{8}$ = ٤٢٤,٥

$$\therefore \text{ز}_{\text{م}(4)} = \frac{\text{مجـ}\,(\text{س} - \bar{\text{س}})^{4}}{\text{ن}} = \frac{\text{مجـ ح}^{4}}{\text{ن}}$$

وحيث أن مجـ ح^{4} :

$$= \text{ح}_1^4 + \text{ح}_2^4 + \text{ح}_3^4 + \text{ح}_4^4 + \text{ح}_5^4 + \text{ح}_6^4 + \text{ح}_7^4 + \text{ح}_8^4$$

$$\therefore \text{مجـ ح}^{4} = (٤٠٩٠٦) + (١٢٩٦) + (١٢٩٦) + (٨١)$$

$$+ (١٦) + (١٠٠٠٠) + (٥٠٦٢٥)$$

$$= ٦٧٤١٠$$

$$\therefore \text{ز}_{\text{م}(4)} = \frac{٦٧٤١٠}{٨} = ٨٤٢٦,٢٥$$

مثال (٧) :

أوجد كلا من العزوم المركزية ($\text{ز}_{\text{م}}$) من الأول حتى الرابع للتوزيع التكرارى التالى:

ف	٠ـ	٢٠ـ	٤٠ـ	٦٠ـ	٨٠ـ ١٠٠	المجموع
ك	١٥	٩	٧	١٧	٢	٥٠

الحـل :

ف	ك	س	س ك	ح (س − $\bar{\text{س}}$)	(س − $\bar{\text{س}}$) ك (ح ك)	(س − $\bar{\text{س}}$)^2 ك (ح^{2}ك)	(س − $\bar{\text{س}}$)^3 ك (ح^{3}ك)	(س − $\bar{\text{س}}$)^4 ك (ح^{4}ك)
٠ـ	١٥	١٠	١٥٠	٤٢٨,١٠	٤٩٢−	١٦١٣٧,٦	٥٢٩٣١٣,٢٨−	١٧٣٦١٤٧٥
٢٠ـ	٩	٣٠	٢٧٠	٤٢٨,٣٠	١١٥,٢−	١٤٧٤,٥٦	١٨٨٧٤,٣٧−	٢٤١٥٩١,٩
٤٠ـ	٧	٥٠	٣٥٠	٤٢٨,٥٠	٥٠,٤+	٣٦٢,٨٨	٢٦١٢,٧٤+	١٨٨١١,٧
٦٠ـ	١٧	٧٠	١١٩٠	٤٢٨,٧٠	٤٦٢,٤+	١٢٥٧٧,٢٨	٣٤٢١٠٢,٠١+	٩٣٠٥١٧٤,٧
٨٠ـ١٠٠	٢	٩٠	١١٨٠	٤٢٨,٩٠	٩٤,٤+	٤٤٥٥,٦٨	٢١٠٣٠٨,٠٨+	٩٩٢٦٥٤١,٢
المجموع	٥٠		٢١٤٠		٦٠٧,٢+ ٦٠٧,٢−	٣٥٠٠٨	٥٥٥٠٢٢,٨٣+ ٥٤٨١٩٧,٦٥− ٦٨٢٥,١٨+	٣٦٨٥٣١٦٠

$$\overline{س} = \frac{مجـ\ س\ ك}{مجـ\ ك} = \frac{٢١٤٠}{٥٠} = ٤٢,٨$$

وتكون العزوم المركزية كما يلى :

$$زم_{(١)} = \frac{مجـ\ ح\ ك}{مجـ\ ك} = \frac{صفر}{٥٠} = صفر$$

$$زم_{(٢)} = \frac{مجـ\ ح^{٢}\ ك}{مجـ\ ك} = \frac{٣٥٠٠٨}{٥٠} = ٧٠٠,١٦$$

$$زم_{(٣)} = \frac{مجـ\ ح^{٣}\ ك}{مجـ\ ك} = \frac{٦٨٢٥,١٨}{٥٠} = ١٣٦,٥$$

$$زم_{(٤)} = \frac{مجـ\ ح^{٤}\ ك}{مجـ\ ك} = \frac{٣٦٨٥٣١٦٠}{٥٠} = ٣٧٧٠٦٣,٢$$

ثالثا : العزوم حول النقطة (أ) (العزوم العامة) وسنرمز لها بالرمز ($\overline{زم}$).

(أ) لبيانات غير مبوبة (مفردة).

$$\text{العزم الأول } \overline{زم}_{(١)} = \frac{مجـ\ (س - أ)}{ن} = \frac{مجـ\ \overline{ح}}{ن} \quad .... (١٧)$$

$$\text{العزم الثانى } \overline{زم}_{(٢)} = \frac{مجـ\ (س - أ)^{٢}}{ن} = \frac{مجـ\ \overline{ح}^{٢}}{ن} \quad .... (١٨)$$

$$\text{العزم الثالث } \overline{زم}_{(٣)} = \frac{مجـ\ (س - أ)^{٣}}{ن} = \frac{مجـ\ \overline{ح}^{٣}}{ن} \quad .... (١٩)$$

$$\text{العزم الرابع } \overline{زم}_{(٤)} = \frac{مجـ\ (س - أ)^{٤}}{ن} = \frac{مجـ\ \overline{ح}^{٤}}{ن} \quad .... (٢٠)$$

ب ـ لبيانات مبوبه (توريعات تكراريه)

$$\text{زم}'_{(1)} = \frac{\text{مجـ ك}\,(\text{س} - \text{أ})}{\text{مجـ ك}} = \frac{\text{مجـ ح}'\,\text{ك}}{\text{مجـ ك}} \quad \ldots\ldots\ldots (٢١)$$

$$\text{زم}'_{(2)} = \frac{\text{مجـ ك}\,(\text{س} - \text{أ})^{2}}{\text{مجـ ك}} = \frac{\text{مجـ ح}'^{2}\,\text{ك}}{\text{مجـ ك}} \quad \ldots\ldots\ldots (٢٢)$$

$$\text{زم}'_{(3)} = \frac{\text{مجـ ك}\,(\text{س} - \text{أ})^{3}}{\text{مجـ ك}} = \frac{\text{مجـ ح}'^{3}\,\text{ك}}{\text{مجـ ك}} \quad \ldots\ldots\ldots (٢٣)$$

$$\text{زم}'_{(4)} = \frac{\text{مجـ ك}\,(\text{س} - \text{أ})^{4}}{\text{مجـ ك}} = \frac{\text{مجـ ح}'^{4}\,\text{ك}}{\text{مجـ ك}} \quad \ldots\ldots\ldots (٢٤)$$

حيث أن :

$\text{ح}' = (\text{س} - \text{أ})$

س = مراكز الفئات التكراريه

أ = النقطه المختاره لحساب العزوم حولها .

(نفس فكرة الوسط الفرضى)

مثـال (٨) :

أوجد كل من العزوم العامة (ز مَ) من الأول حتى الرابع للتوزيع التكرارى بالمثال رقم (٧) السابق حول النقطة (أ = ٥٠) .

الحـــــل :

ف	ك	س	(س-أ) (ح)	(س-أ) ك (ح ك)	$(س-أ)^2$ ك ($ح^2$ ك)	$(س-أ)^3$ ك ($ح^3$ ك)	$(س-أ)^4$ ك ($ح^4$ ك)
٠ـ	١٥	١٠	٤٠ـ	٦٠٠ـ	٢٤٠٠٠	٩٦٠٠٠٠ـ	٣٨٤٠٠٠٠٠
٢٠ـ	٩	٣٠	٢٠ـ	١٨٠ـ	٣٦٠٠	٧٢٠٠٠ـ	١٤٤٠٠٠٠
٤٠ـ	٧	٥٠	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر
٦٠ـ	١٧	٧٠	٢٠+	٣٤٠+	٦٨٠٠	١٣٦٠٠٠+	٢٧٢٠٠٠٠
٨٠ـ١٠٠	٢	٩٠	٤٠+	٨٠+	٣٢٠٠	١٢٨٠٠٠+	٥١٢٠٠٠٠
المجموع	٥٠	أ=٥٠		٤٢٠+ ٧٨٠ـ ٣٦٠ـ	٣٧٦٠٠	٢٦٤٠٠٠+ ١٠٣٢٠٠٠ـ ٧٦٨٠٠٠ـ	٤٧٦٨٠٠٠٠

وتكون العزوم العامة كما يلى:

$$\text{زم}'_{(1)} = \frac{\text{مجـ ح}'\text{ك}}{\text{مجـ ك}} = \frac{-٣٦٠}{٥٠} = (-٧,٢)$$

$$\text{زم}'_{(2)} = \frac{\text{مجـ ح}^{2}\text{ ك}}{\text{مجـ ك}} = \frac{٣٧٦٠٠}{٥٠} = ٧٥٢$$

$$\text{زم}'_{(3)} = \frac{\text{مجـ ح}^{3}\text{ ك}}{\text{مجـ ك}} = \frac{-٧٦٨٠٠٠}{٥٠} = (-١٥٣٦٠)$$

$$\text{زم}'_{(4)} = \frac{\text{مجـ ح}^{4}\text{ ك}}{\text{مجـ ك}} = \frac{٤٧٦٨٠٠٠٠}{٥٠} = ٩٥٣٦٠٠$$

رابعاً : العزوم المختصرة سنرمز لها بالرمز ($\text{زم}''$)

لإختصار الوقت والمجهود فى العمليات الحسابيه عند حساب العزوم العامه مثلاً، فإنه يمكن الحصول على العزوم المختصرة فى وقت بسيط وبمجهود أقل وذلك بقسمه (س - أ) على مقدار ثابت وليكن (ث) أو (ل) والاخيرة تشير إلى طول الفئة فى

التوزيعات التكراريه المنتظمه .

حيث أن :

$$ح'' = \frac{(س - أ)}{(ث) \text{ أو } (ل)}$$

وعليه فيمكن الحصول على العزوم المختصرة فى حالة العزوم العامة كما يلى:

أ – فى حالة البيانات غير المبوبة (المفردة) .

العـزم الأول : $ز م''_{(1)} = \frac{مجـ ح''}{ن}$ .... (٢٥)

العـزم الثانى : $ز م''_{(2)} = \frac{مجـ ح''^{2}}{ن}$ .... (٢٦)

العـزم الثالث : $ز م''_{(3)} = \frac{مجـ ح''^{3}}{ن}$ .... (٢٧)

العـزم الرابع : $ز م''_{(4)} = \frac{مجـ ح''^{4}}{ن}$ .... (٢٨)

ب ـ فى حاله البيانات المبوبه (توزيعات تكراريه) :

العـزم الأول : $ز م''_{(1)} = \frac{مجـ ح'' ك}{مجـ ك}$ .... (٢٩)

العـزم الثانى : $ز م''_{(2)} = \frac{مجـ ح''^{2} ك}{مجـ ك}$ .... (٣٠)

العـزم الثالث : $ز م''_{(3)} = \frac{مجـ ح''^{3} ك}{مجـ ك}$ .... (٣١)

العـزم الرابع : $ز م''_{(4)} = \frac{مجـ ح''^{4} ك}{مجـ ك}$ .... (٣٢)

ويلاحظ عموما فى حاله العزوم المختصره أنه إذا كانت :

أ = صفر ، ث أو ل = ١ نحصل على العزوم الصفريه

أما اذا كانت أ = μ أو $\bar{س}$ ، (ث) أو (ل) = ١

نحصل على العزوم المركزية

مثـال (٩) :

أوجد العزوم العامة المختصرة (زم″) من الأول حتى الرابع للتوزيع التكرارى بالمثال رقم (٨) السابق.

الحـل :

يمكن الوصول إلى ح″ = $\frac{ح'}{ل}$ لأن التوزيع تنظيم وذلك كما يلى .

ف	ك	س	ح′	ح″ = ح′/ل	ح″ك	ح″٢ك	ح″٣ك	ح″٤ك
-٠	١٥	١٠	-٤٠	ل = ٢٠ -٢	-٣٠	١٢٠٠	-٤٨٠٠٠	١٩٢٠٠٠٠
-٢٠	٩	٣٠	-٢٠	-١	-٩	١٨٠	-٣٦٠	٧٢٠٠
-٤٠	٧	٥٠	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر
-٦٠	١٧	٧٠	+٢٠	+١	+١٧	٣٤٠	٦٨٠٠	١٣٦٠٠٠
٨٠-١٠٠	٢	٩٠	+٤٠	+٢	+٤	٨٠	٣٢٠٠	١٢٨٠٠٠
المجموع	٥٠	أ = ٥٠	ل = ٢٠		-٣٩ +٣١ -٨	١٨٠٠	-٤٨٣٦٠ +١٠٠٠٠ -٣٨٣٦٠	٢١٩١٢٠٠

وتكون العزوم العامة المختصرة كما يلى:

$$\text{، زم}''_{(1)} = \frac{\text{مجـ ح}'' \text{ك}}{\text{مجـ ك}} = \frac{-٨}{٥٠} = (-٠,١٦)$$

$$\text{، زم}''_{(2)} = \frac{\text{مجـ ح}''^{2} \text{ ك}}{\text{مجـ ك}} = \frac{١٨٠٠}{٥٠} = ٣٦$$

$$\text{، زم}''_{(3)} = \frac{\text{مجـ ح}''^{3} \text{ ك}}{\text{مجـ ك}} = \frac{-٣٨٣٦٠}{٥٠} = (-٧٦٧,٢)$$

$$\text{، زم}''_{(4)} = \frac{\text{مجـ ح}''^{4} \text{ ك}}{\text{مجـ ك}} = \frac{٢١٩١٢٠٠}{٥٠} = ٤٣٨٢٤$$

العزوم ومقاييس الإلتواء:

نلاحظ فيما سبق عند دراسة العزوم ما يلى :

(١) أن العزم الأول حول الصفر (زمـ $_{(1)}$) يساوى الوسط الحسابى ($\bar{س}$ أو μ) دائما

(٢) أن العزم الأول حول الوسط الحسابى (المركزى)

أى (زم $_{(1)}$) = صفر دائماً (لماذا ؟) لأن مجـ (س − $\bar{س}$)' و مجـ (س − $\bar{س}$) ك = صفر

(٣) أن العزم الثانى حول الوسط الحسابى (المركزى)

أى (زم $_{(2)}$) = التباين ($ع^{2}$ أو σ^{2})

(٤) أن العزم الثالث حول الوسط الحسابى (المركزى)

أى (زم $_{(3)}$) فى حاله التوزيع الطبيعى (او المتماثل) يساوى الصفر دائما .

(٥) أن العزم الثالث حول الوسط الحسابى (المركزى)

أى ($ز_{م(٣)}$) فى حالة التوزيع غير المتماثل إما موجباً أو سالباً (*) تبعاً لنوع الإلتواء.

ومن الملاحظة الخامسة أى رقم (٥) السابقة يمكننا الاعتماد على العزم الثالث المركزى فى المقارنة بين الإلتواء لتوزيعين مختلفين وحتى نتخلص من مشكلة إختلاف وحدات القياس بينهما، فيتطلب الأمر الحصول على مقياس نسبى للالتواء، لهذا يقتضى الأمر القسمة على مقياس تشتت مرفوع للقوة الثالثة ($ع^٣$ أو $\sigma^٣$) لأن وحدات البسط مكعبة (مرفوعة للقوة الثالثة) وذلك باستخدام العزوم أى $(\sqrt{م_{(٢)}})^٣$

فإذا ما رمزنا لمعامل الالتواء باستخدام العزوم بالرمز.

$ت_{ز م(٣)}$ فإن :

$$ت_{ز م(٣)} = \frac{(ز_{م(٣)})}{(\sqrt{ز_{م(٢)}})^٣} \quad .... \quad (٤ / أ)$$

ولا سباب رياضية فقد إقترح بيرسون إستخدام مربع المعامل السابق أى سيكون معامل بيرسون للالتواء:

$$ت^٢_{ز م(٣)} = \frac{(ز_{م(٣)})^٢}{(ز_{م(٢)})^٣} \quad .... \quad (٤ / ب)$$

مثال (١٠) :

احسب معامل الالتواء لبيرسون فى المثال رقم (٧) السابق .

الحـــل :

بالنظر إلى المثال رقم (٧) السابق نجد أن :

(*) لأن تكعيب الانحرافات لايخلصنا من الإشارة الجبرية فتظل إنحرافات القيم الأكبر من المتوسط موجبه بينما انحرافات القيم الأقل من المتوسط سالبه) .

$$\text{زم}_{(3)} = 136,5$$

$$\text{، زم}_{(2)} = 700,16$$

$$\therefore \text{ت}_{\text{زم}(3)} = \frac{(\text{زم}_{(3)})^2}{(\text{زم}_{(2)})^3}$$

$$\therefore \text{ت}_{\text{زم}(3)} = \frac{(136,5)^2}{(700,16)^3} = 0,0000542$$

(أى الالتواء موجب بسيط جداً جداً) .

ملحوظة : نظراً لأن الانحرافات عن الوسط الحسابى ، يمكن أن تكون كبيرة من ناحية ، أو كسرية من ناحية أخرى ومن ثم رفعها إلى القوة الثالثة (تكعيبها) للحصول على العزم الثالث المركزى ($\text{زم}_{(3)}$) يؤدى إلى مشقة حسابية وضياع للوقت والمجهود لذا نفضل حساب العزم الثالث على أساس وسط فرضى ($\text{زم}'_{(3)}$) ثم يصحح حتى نحوله إلى العزم الثالث المركزى $\text{زم}_{(3)}$ بإستخدام العلاقة التالية:

$$\text{زم}_{(3)} = \left[\frac{\text{مج ح}'^3 \text{ك}}{\text{مج ك}} - \frac{3 \text{ مج ح}'\text{ك}}{\text{مج ك}} \times \frac{\text{مج ح}'^2 \text{ك}}{\text{مج ك}} \right.$$

$$\left. + 2 \left(\frac{\text{مج ح}'\text{ك}}{\text{مج ك}} \right)^3 \cdots \right]$$

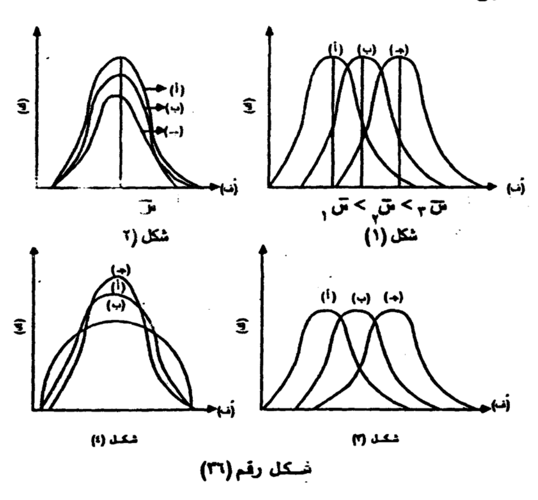
الجزء الثالث

التفرطح

Kottosis

مقدمة :

إذا ما أستعرضنا الأشكال المختلفة للمنحنيات التكرارية لتوزيعات تكرارية محتلفة حيث يتوقف شكل المنحنى على التوزيع التكرارى الذى يمثله فسنجد ما يلى :



شكل رقم (٣٦)

ونلاحظ ما يلى :

(أولا) فى الشكل (١) ثلاثه منحنيات متماثله (طبيعيه) متشابهة فى الشكل وتختلف من حيث قيمتها الوسطى فالمتوسط للشكل (حـ) > من المتوسط للشكل (ب) أكبر من المتوسط للشكل (أ) وهى تمثل ثلاثه توزيعات تكراريه مختلفه .

ثانيا : فى الشكل (٢) ثلاثة منحنيات متماثلة (طبيعية) ومختلفة فى الشكل ولكن لها قيمه متوسطه واحده ، وهى أيضاً تمثل ثلاثة توزيعات تكراريه مختلفة.

ثالثا : فى الشكل (٣) ثلاثه منحنيات (ب) منحنى متماثل ، والمنحنيين (أ ، جـ) غير متماثلين أى ملتوين حيث (أ) ملتوى لليمين (حـ) ملتوى لليسار وهى تمثل ثلاثه توزيعات تكراريه مختلفه .

رابعـا : فى الشكل (٤) ثلاثه منحنيـات ، الأوسط منهـا (أ) منحنى متماثل (طبيعى) ، والأول منها (ب) أكثر تفرطحاً عند قمته من المنحنى (أ) - المعتاد - والثالث منها (حـ) فقمته أكثر تحدبا من التوزيع (أ) - المعتاد - فهو منحنى مدبب، وهى تمثل ثلاثه توزيعات تكراريه مختلفه أيضا .

وفيما سبق أمكننا قياس كل من الخصائص الثلاثة الأولى وهى خصائص النزعة المركزية، التشتت، والالتواء، بمقاييس دقيقة محددة سبق لنا التعرض لها فى الأجزاء السابقة، فإنه أيضاً يجب علينا إيضاح بعض المقاييس الاحصائية الدقيقة للتفرطح والتدبب فى الاجزاء التالية ، وان كان يجب علينا مقدما ايضاح بعض النقاط التالية .

معنى التفرطح وكيفية قياسة :

التفرطح هو الخاصية الرابعة من خصائص أى توزيع تكرارى ، فإذا أردنا قياس مقدار التفرطح أو التدبب لأى توزيع تكرارى ، فإن ذلك يتم بالقياس للمنحنى المتماثل (الطبيعى) لتوزيع متماثل حيث أن التفرطح يقيس مقدار التدبب لقمة هذه المنحنيات إرتفاعا أو إنخفاضا بالنسبة لقمة التوزيع المتماثل

(الطبيعى) والذى يطلق عليه (متوسط التفرطح) وهو المبين فى المنحنى (أ) فى الشكل رقم (٤) السابق .

حيث نجد أن :

(١) المنحنى (حـ) ـ التوزيع التكرارى (حـ) ، له قمه عاليه نسبيا ويطلق عليه منحنى مدبب .

(٢) المنحنى (ب) ـ التوزيع التكرارى (ب) ـ له قمة مسطحة ويطلق عليه منحنى مفرطح .

(٣) المنحنى (أ) ـ التوزيع التكرارى (أ) ـ له قمة ليست مدببه ولا مفرطحه ويطلق عليه منحنى متوسط التفرطح Meskuritic أو (المنحنى الطبيعى) أو (المعتاد) أو (المتماثل) ومعامل تفرطحه = ٣ (*)

وعليه لمعرفه درجه التفرطح أو التدبب لأى توزيع تكرارى ، فقد أمكن ذلك بإستخدام المقياس التالى للتفرطح والذى يعتمد أساسا على العزم الرابع المركزى $م_{(٤)}$.

وهو (معامل التفرطح) والذى سنرمز له بالرمز ($طزم_{(٤)}$) ومن الضرورى أن يكون هذا المعامل نسبيا حتى يمكن مقارنه توزيعين أو أكثر مختلفين فى وحدات القياس من حيث التفرطح أو التدبب لذا كان لابد من قسمة $زم_{(٤)}$ على أحد مقاييس التشتت أي على أهمها وهو الانحراف المعيارى مرفوعا لنفس قوة العزم الرابع المركزى ($زم_{(٤)}$) أى أن :

$$طزم_{(٤)} = \frac{زم_{(٤)}}{(ع \text{ أو } \sigma)^{٤}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (٥/أ)$$

أو (اذا كانت ع أو σ معلومة)

$$طزم_{(٤)} = \frac{زم_{(٤)}}{(زم_{(٢)})^{٢}} \quad \ldots\ldots\ldots (٥ / ب)$$

حيث $زم_{(٢)} = (ع^{٢})$ وعليه $ع^{4} = (زم_{(٢)})^{٢}$

(*) وسيتضح لنا ذلك فى أجزاء تاليه .

(اذا كانت ع أو σ غير معلومه)

حيث أن $ع^2$ أ، σ^2 = $زم_{(2)}$

وعليه فأن الكميه ($طزم_{(4)}$ - ٣) تعبر عن زياده أو نقص التفرطح لأى توزيع تكرارى عن تفرطح التوزيع الطبيعى أو المتماثل أى أنه :

(١) اذا كانت $طزم_{(4)}$ لتوزيع تكرارى معين أقل من (٣) فإن هذا التوزيع - وبالتالى المنحنى الممثل له - يكون مفرطحا (Platykuttic)

(٢) أما اذا كانت $طزم_{(4)}$ لتوزيع تكرارى معين أكبر من (٣) فإن هذا التوزيع - بالتالى المنحنى الممثل له - يكون مدببا (Leptokurtic).

مثال (١١) :

إحسب معامل التفرطح من التوزيع التكرارى بالمثال رقم (٧) السابق من هذا الفصل.

أولا : بأستخدام الانحراف المعيارى (ع)

ثانيا : باستخدام العزم الثانى المركزى ($زم_{(2)}$)

الحـــل :

ف	ك	س	س ك	$س^2$ ك	$(س - \bar{س})^2$ ك ($ح^2$ ك)	$(س - \bar{س})^4$ ك ($ح^4$ ك)
-٠	١٥	١٠	١٥٠	١٥٠٠	١٦١٣٧,٦	١٧٣٦١٤٧٥
-٢٠	٩	٣٠	٢٧٠	٨١٠٠	١٤٧٤,٥٦	٢٤١٥٩١,٩
-٤٠	٧	٥٠	٣٥٠	١٧٥٠٠	٣٦٢,٨٨	١٨٨١١,٧
-٦٠	١٧	٧٠	١١٩٠	٨٣٣٠٠	١٢٥٧٧,٢٨	٩٣٠٥١٧٤,٧
٨٠-١٠٠	٢	٩٠	١٨٠	١٦٢٠٠	٤٤٥٥,٦٨	٩٩٢٦٥٤١,٢
المجموع	٥٠		٢١٤٠	١٢٦٦٠٠	٣٥٠٠٨	٣٦٨٥٣١٦٠

$$\bar{س} = \frac{مجـ س ك}{مجـ ك} = \frac{٢١٤٠}{٥٠} = ٤٢,٨$$

$$ع = \sqrt{\frac{مجـ س^٢ ك}{مجـ ك} - \left(\frac{مجـ س ك}{مجـ ك}\right)^٢}$$

$$= \sqrt{\frac{١٢٦٦٠٠}{٥٠} - \left(\frac{٢١٤٠}{٥٠}\right)^٢}$$

$$= \sqrt{٢٥٣٢ - ١٨٣١,٨٤}$$

$$ع = \sqrt{٧٠٠,١٦} = ٢٦,٦٤$$

العزم الرابع المركزى $ز م_{(٤)} = \frac{مجـ ح^٤ ك}{مجـ ك} = \frac{٣٦٨٥٣١٦٠}{٥٠}$

$= ٣٧٧٠٦٣,٢$

أولا : $ط ز م_{(٤)} = \frac{ز م_{(٤)}}{(ع)^٤} = \frac{٣٧٧٠٦٣,٢}{(٢٦,٦٤)^٤}$

$\therefore ط ز م_{(٤)} = \frac{٣٧٧٠٦٣,٢}{٥٠٣٦٥٩,٣}$

$٠,٧٥ < ٣$

($\therefore$ هذا التوزيع التكرارى مفرطحا)

$ز م_{(٢)} = ٧٠٠,١٦$ انظر حل المثال رقم (٧) السابق

ثانيا :

$$ط ز م_{(٤)} = \frac{م_{(٤)}}{(ز م_٢)^٢}$$

$$= \frac{\text{٣ ٧٧٠٦٣,٢}}{(\text{٧٠٠,١٦})^{\text{٢}}}$$

$$= \frac{\text{٣٧٧٠٦٣,٢}}{\text{٤٩٠٢٢٤,٠٢}}$$

$$= \text{٠,٧٧} < \text{٣}$$

(∴ هذا التوزيع التكرارى مفرطحا)

تمارين ٦

(١) إحسب بإستخدام العزوم المركزيه معاملى (أ) الإلتواء (ب) التفرطح للبيانات التاليه :

١ ، ٣ ، ٥ ، ٩ ، ١٠ ، ١٢ ، ٢٠ ، ٢٠

(٢) فيما يلى توزيع تكرارى لأعمار عينه من ١٠ أشخاص على حسب العمر :

فئه العمر ف	صفر	١٠ـ	٢٠ـ	٣٠ـ ٤٠	المجموع
العدد (ك)	١	٣	٤	٢	١٠

المطلوب :

(أ) حساب معامل الإلتواء (بأكثر من طريقه)

(ب) حساب معامل التفرطح (بأكثر من طريقه)

(٣) الجدول التكرارى التالى يوضح توزيع عينه من العاملين مكونة من ٤٠٠ عامل بأحدى الشركات حسب فئات العمر :

ف	٢٠ـ	٢٥ـ	٣٠ـ	٣٥ـ	٤٠ـ	٤٥ـ	٥٠ـ	٥٥ـ ٦٠	المجموع
ك	١٢	٢٢	٥٠	٧٥	٨٠	٧٠	٥٥	٣٦	٤٠٠

المطلوب :

أولا : بإستخدام الرسم البيانى حدد نوع الالتواء

ثانيا : إحسب معامل الالتواء بإستخدام .

(أ) معامل الالتواء لبرسون (ت١ ، ت٢)

(ب) معامل الالتواء لباولى

(جـ) معامل الالتواء باستخدام العزوم فى حالتين :

أولهمـــا : حول الوسط الحسابى

ثانيهمـا : حول قيمه ثابته (أ) = ٣٥

(ثالثا) : إحسب معامل التفرطح للتوزيع .

(٤) إحسب معامل التفرطح من التوزيع التكرارى التالى :

ف	١٠	-٢٠	-٢٥	-٣٥	٤٠ _ ٥٠	المجموع
ك	٥٠	٢٠	٨٠	٣٠	٢٠	٢٠٠

أولا : باستخدام الانحراف المعيارى

ثانيا : باستخدام العزم المركزى الثانى .

(٥) إحسب نوع ومعامل الالتواء (بأكثر من طريقه) ، ومعامل التفرطح لكل من التوزيعات التكرارية التالية وقارن بينها، بيانياً وحسابياً.

أولا

ف	-٠	-١٠	-٢٠	-٣٠	-٤٠	-٥٠	-٦٠	-٧٠
ك	٣	٥	١٧	٤٢	٤٢	١٣	٥	٣

ثانيا :

ف	-٠	-١٠	-٢٠	-٣٠	-٤٠	-٥٠	-٦٠	-٧٠
ك	٣	٦	٢١	٣٥	٣٥	٢١	٦	٣

ثالثا :

ف	٠-	١٠-	٢٠-	٣٠-	٤٠-	٥٠-	٦٠-	٧٠-
ك	٤	١٦	٢٠	٢٥	٢٥	٢٠	١٦	٤

رابعا :

ف	٠-	١٠-	٢٠-	٣٠-	٤٠-	٥٠-	٦٠-	٧٠-
ك	١١	٢٥	٤٠	٢٠	١٥	١٠	٦	٣

خامسا :

ف	٠-	١٠-	٢٠-	٣٠-	٤٠-	٥٠-	٦٠-	٧٠-
ك	٣	٦	١٠	١٥	٢٠	٤٠	٢٥	١١

الفصل السابع

دراسة العلاقة بين متغيرين أو أكثر

مقدمة عامة:

إن ما تمت دراسته فى الفصول السابقه من تحليل لبيان ظاهرة ما وتلخيصها وعرضها جدوليا أو بيانيا فى شكل رسوم هندسيه أو مقاييس إحصائيه سواء أكانت مقاييس للمتوسطات أو مقاييس للتشتت أو تماثل أو التواء أو تفرطح للتعرف على الخصائص والمميزات للتوزيع التكرارى لهذه الظاهرة يعنى ما سبق كان لظاهرة أو متغير واحد فقط سواء أكانت هذه الظاهرة هى الطول أو

لكن هناك الكثير من المشاكل الإحصائيه التى تتطلب دراسة العلاقة بين ظاهرتين او متغيرين او أكثر ، فى كافة المجالات سواء أكانت إقتصادية أو إجتماعية أو صحية أو تربوية أو تجريبية ... الخ.

وحيث أن أى ظاهرة لا تتغير بمعزل عن الظواهر الأخرى المحيطة والمرتبطة بها ، لذا كان الحكم السليم على ظاهرة ما يجب أن يتم من خلال دراسة علاقتها بالظواهر الأخرى التى تؤثر فيها وتتأثر بها، ومما لا شك فيه أنه بذلك تزداد الفائدة والحكم السليم والدقيق، ودقة التوقع الاحصائى، خاصة إذا أخذنا فى الاعتبار أكبر عدد من الظواهر أو الموثرات عند إجراء هذه الدراسات الإحصائية.

فعلى سبيل المثال الباحث الإقتصادى أو التسويقى تعنيه دراسة العلاقة بين الطلب على سلعة معينه ، وسعرها ، حيث أنه على ضوء هذه العلاقه يمكن إقتراح سياسه سعريه ما لسلعة أو مجموعه من السلع المشابهة هذا من ناحية ، ومن ناحيه أخرى نجد أن الطلب على سلعة معينه يتأثر بسعر تلك السلعة أو أسعار السلع البديله ، ودخل المستهلك ، ومستواه التعليمى بالاضافه الى عمر وجنس المستهلك ، ومما لاشك فيه أن أخذ العوامل السابقه فى الاعتبار سيساعد

إلى حد كبير فى التنبؤ بتحديد كميه الإنتاج المثاليه حاليا أو مستقبلا من هذه السلعة، وهكذا الأمر فى معظم إن لم يكن فى كل مجالات النشاط الاقتصادى والإجتماعى، وفروع العلوم الأخرى التجريبية.

وعلى ذلك فإن الباحث عندما يقوم بدراسة العلاقة بين ظاهرتين أو متغيرين أو أكثر يهدف إلى أمرين :

أولهما : قياس قوة العلاقة بين الظاهرتين أو المتغيرين، هل هذه العلاقة طردية أم عكسية أم لا توجد علاقة بين كلا المتغيرين، وإذا كانت توجد علاقة (طردية أو عكسية) فهل هى علاقة تامة أو قوية أو متوسطة أو ضعيفة.

وسوف نتمكن من الحكم على قوة هذه العلاقة أو إتجاهها على النحو السابق ذكره بإستخدام أحد المقاييس الاحصائيه الهامة ألا وهو « معامل الارتباط»

ثانيهما : قياس درجة العلاقة بين متغيرين أو أكثر بمعنى آخر هل ترتبط هذه المتغيرات بعلاقة خطية أم غير خطيه وبعد تعيين هذه العلاقة إستخدامها فى التنبؤ ويمكن الوصول إلى ذلك باستخدام أحد المقاييس الإحصائيه الهامه ألا وهو « خط الإنحدار »

وعلى ذلك فهناك إختلاف بين الانحدار والارتباط من حيث الهدف والأسلوب، فبفرض إن لدينا متغيرين أحدهما (س) والآخر (ص) بحيث يمكن تحديد أحدهما (ص) بدلاله الآخر (س) ، بمعنى آخر اذا إعتمدت قيمه المتغير التابع (ص) على قيمة المتغير المستقل (س) فإننا نقول إن هناك علاقة داليه بين المتغيرين ص ، س أى أن (ص) داله فى (س) وتترجم العلاقة السابقة رياضياً على الصورة

ص = د (س)

يطلق على الدالة السابقة انها دالة فى متغير واحد وهناك أمثلة عديدة لحالات التبعيه المشار اليها عاليه من أهمها .

(١) الانفاق أو الاستهلاك داله فى الدخل .

(٢) مقدار الضريبه المستحقة على رأس المال - عادة - دالة فى رأس المال .

(٣) مساحة المربع داله فى طول ضلعه .

كما أنه يقال للدالة ص = د (س ، ع) داله فى متغيرين ومن أمثلتها .

(١) مساحة المستطيل (ص) تعتمد على طول ضلعه (س) ، وعرضه (ع) .

(٢) الأجر (ص) يعتمد فى تغيره على عدد ساعات العمل (س) ومعدل الإنتاجية فى الساعة (ع) .... وهكذا.

كما أنه يقال للدالة .

ص = د (س ، ع ، ط ، هـ ، و ، .... الخ) دالة متعدده المتغيرات ومن أمثلتها .

(١) الانجاب (ص) من الممكن أن يكون دالة فى درجة تعلم كل من الزوج والزوجه (س) ، والدخل (ع) ، والمستوى الصحى (ط) ، والمعتقدات الدينية (هـ) والاعراف الاجتماعيه (و) .... الخ .

(٢) إنتاجيه فدان القمح (ص) يتأثر بمتغيرات مستقله كثيره نذكر منها نوع التربة (س) ، وأنواع البذور المستخدمه (ع) ، وطريقه الزراعة (ط) وكميه المياة (هـ) وحاله الجو (و) ... الخ

وعليه فالانحدار يهتم أساساً بقياس العلاقة الرياضية بين المتغير التابع (ص) والمتغير المستقل أو المتغيرين المستقلين أو المتغيرات المستقلة على حسب الأحوال بحيث أنه بعد قياس هذه العلاقة الرياضية سواء أكانت خطية أو فى صورة منحنى من آى درجة يمكن أن نتنبأ بقيمة (ص) بمعلومية المتغير أو المتغيرات المستقلة (س)، وهذا هو الدور الأساسى للانحدار (*).

أما الإرتباط فيهدف أساسا إلى تلخيص البيانات العدديه لأى ظاهرتين أو متغيرين فى معامل واحد يطلق عليه «معامل الارتباط» والذى يعبر عن قوة العلاقة بين

(*) راجع للمؤلف أساسيات الرياضيات ، مكتبه الأشعاع ، الطبعه الثانيه ١٩٩٨ ، الاسكندرية .

المتغيرين دون الإهتمام بأى من هذين المتغيرين تابع أو مستقل أو ما اذا كان كل منهما مؤثر أو متأثر بالآخر .

وسوف تنصب دراستنا فى الأجزاء التاليه على كل من :

أولا - تحليل الانحدار البسيط للعلاقه بين متغيرين .

ثانيا - قياس معامل الارتباط الخطى بين متغيرين فقط .

وبالرغم من الاختلاف بين كل من الانحدار والارتباط فى الهدف والتنفيذ الا أنهما مترابطين وسيتضح لنا ذلك تفصيلاً فى نهاية هذا الفصل.

المبحث الأول

تحليل الانحدار البسيط

Simple Regression Analysis

١ـ مقدمة وتعاريف :

لقد تم معرفة الانحدار (*) قبل معرفة الارتباط ، والانحدار ظاهرة طبيعيه ترجمت إلى مفهوم إحصائى ، ويهدف تحليل الانحدار إلى تقدير معالم (مجاهيل) المعادله الرياضيه التى تعبر عن العلاقه السببيه القائمه بين المتغيرات تمهيدا للوصول إلى أفضل تقدير أو (التنبؤ) للمتغير التابع (ص) أى تقدير بيانات غير معروفة مبنيه على بيانات معروفة وذات صلة بالظاهرة المدروسة .

وعليه سيكون التركيز فى هذا الجزء على الإجراءات الاحصائية اللازمة لاجراء عملية التنبؤ بمطومية عناصر متغير واحد يطلق عليه المتغير المستقل (Inde-pendent variable) وسنرمز له بالرمز س: (x) بمتغير آخر يسمى المتغير التابع (Dependent variable) وسنرمز له بالرمز ص (y) بينهما علاقة داليه وهو ما يتضح لنا من الإجزاء التاليه

٢ـ خط الانحدار (Regression line) :

(أ) أشكال الانتشار (Scatter Diagrams) وخطوط الإنحدار :

وهى التمثيل البيانى للقيم المتناظرة للمتغيرين س ، ص حيث يمثل كل زوج من القيم المتناظرة وهى (س$_1$، ص$_1$) ، (س$_2$، ص$_2$)، (س$_3$، ص$_3$) ، ....، (س$_ن$ ، ص$_ن$) بنقطة فى مجال شكل الانتشار (**) وبذلك يتكون لدينا عدد من النقاط يساوى عدد أزواج القيم وشكل إتجاه النقاط المتتابع يعطى صورة تقريبية للعلاقة بين المتغيرين من حيث نوع هذه العلاقة:

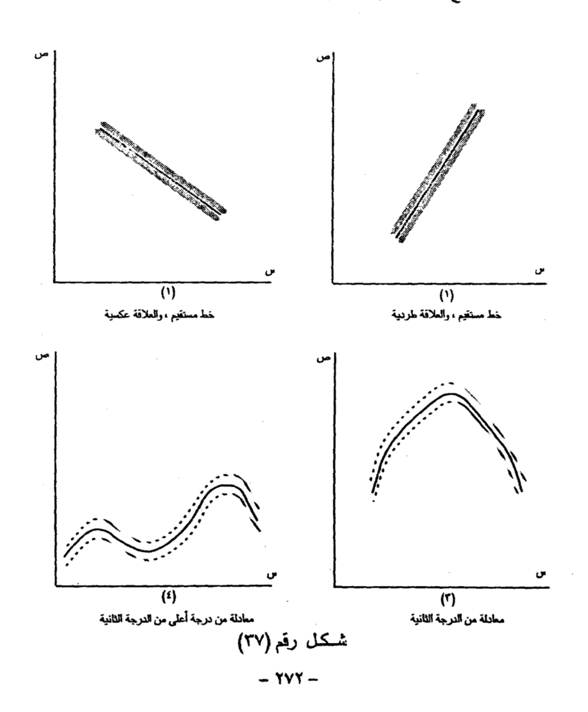
(*) توصل إليه فرنسيس جالتون عام ١٨٨٥ .

(**) إرجع فى ذلك إلى التمثيل البيانى لبعض الدوال ، اساسيات الرياضيات للمؤلف ، مرجع سابق .

هل هى علاقة خطية أم غير خطية ؟

وهل هى علاقة طردية أم عكسية ؟

ويتضح ذلك من الإشكال الإنتشاريه التاليه :



شـكل رقم (٣٧)

أما فيما يختص بتحديد درجة الدالة أو المعادلة التى تمثل العلاقة بين المتغيرين فيمكن القول بأنة إذا وقعت النقاط فى إتجاه مستقيم أو شبه مستقيم - فى أى أتجاه - فإن العلاقة بين المتغيرين يمثلهما معادلة أو دالة من الدرجة الأولى على الشكل :

ص = أ س + ب (حيث س المتغير المستقل ، ص المتغير التابع)

أو س = م ص + حـ (حيث ص المتغير االمستقل ، س المتغير التابع)

لكن إذا كانت النقاط فى شكل الإنتشار يمثلها منحنى منتظم أو شبه منتظم له نهاية واحدة سواء أكانت صغرى أم عظمى ، فإن معادلة الدرجة الثانية فى المتغير المستقل هى التى يمكن أن تمثل الصورة الجبرية للعلاقة الدالية بين المتغيرين وتكون هذه العلاقة على الشكل :

ص = أ س^{٢} + ب س + حـ

[حيث (ص) المتغير التابع ، (س) المتغير المستقل]

أو س = م ص^{٢} + ل ص + ك

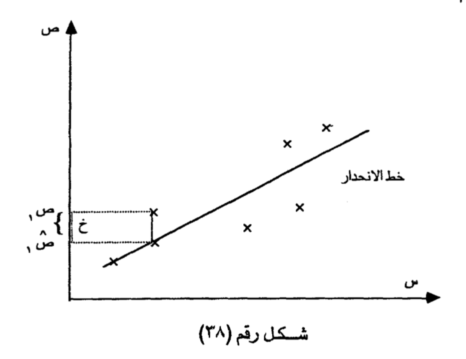
[حيث (س) المتغير التابع ، (ص) المتغير المستقل]

وأخيراً إذا كانت النقاط يمثلها منحنى منتظم أو شبه منتظم له أكثر من نهاية، فإن ما يمثله يمكن أن يكون معادلة من درجة أعلى من الدرجة الثانية تبعاً لعدد النهايات التى يمكن التعرف عليها من شكل الإنتشار .

وبما أنه يمكن رسم عدد كبير من الخطوط المستقيمة فى شكل الانتشار فى معادلة من الدرجة الأولى، فما هو المعيار المستخدم لتحديد أفضل خط مستقيم يمثل هذه العلاقة (Line of Best Fit) ويطلق عليه خط الإنحدار.

والمعيار المستخدم فى تحديد أفضل خط إنحدار هو إنحرافات القيم عن خط معين، فإذا كان مجموع مربعات الانحرافات أقل ما يمكن فإن ذلك الخط المعين هو أفضل خط مستقيم أو خط الإنحدار المطلوب ويمكن اثبات ذلك كما يلى :

إفرض إننا نريد التنبؤ بقيم ص (ويرمز لها بـ صٓ) بمعلومية قيم عناصرالمتغير س فإن الفرق هنا بين (ص ـ صٓ) ويطلق عليه بالخطأ العشوائى (أو بخطأ التنبؤ) وسنرمز له بالرمز (خ) وهو عبارة عن طول الخط الواصل مباشرة من النقطة ص (المشاهده) إلى نقطه مقابله على خط الإنحدار ولتكن (صٓ$_{1}$) بموازات المحور الذى يمثل المتغير ص كما فى الشكل التالى:



شـــكل رقم (٣٨)

و خط الانحدار :

ص = أ س + ب + خ .... (١)

وحيث الأمر الغالب عمليا فى كثير من الظواهر التى تحكمها علاقه خطيه أن تنتشر قيم النقط المشاهده(ص)حول خط الانحدار فيقع بعضها فوق خط الانحدار وبعضها تحت خط الانحدار أى أن الفرق (خ) قد يكون موجبا عند بعض النقاط وسالباً عند البعض الآخر، وعليه فإن محصلة هذا التغير سوف لا تعبر فعلا عن مدى إنتشار النقط المشاهدة حول الخط الممثل لهذه البيانات ، وأحد الوسائل المتبعه هو محاولة جعل مجموع مربعات قيم هذا الخطأ (مجـ خ^{٢})

أقل ما يمكن أى عند حدها الأدنى وهذا يتحقق رياضيا كما يلى عند النقطه (ر) حيث ر = ١ ، ٢ ، ٣ ، .... ، ن

$خ^{٢}_{ر}$ = ($ص_{ر}$ - أ $س_{ر}$ - ب)^{٢} وبأخذ المجموع لطرفى هذه المعادلة

∴ مجـ $خ^{٢}$ = مجـ (ص ـ أ س ـ ب)^{٢} .... (٢)

وعليه فالمطلوب إيجاد قيم كل من أ ، ب بحيث تكون مجـ $خ^{٢}$ عند حدها الأدنى .

وحل المعادله (٢) هو أحد الأساليب الرياضيه المعروفه لإيجاد قيم أ ، ب التى تحقق النهايات الصغرى لهذه المعادله، وبإستخدام أسلوب التفاضل الجزئى يمكن إيجاد قيم أ ، ب التى تحقق النهايه الصغرى د (مجـ $خ^{٢}$)

فاذا رمزنا للطرف الايمن فى معادله (٢) أى (مجـ $خ^{٢}$) بالرمز (ى) فإن المشتقات الجزئيه بالنسبه إلى (ب ، أ) تكون :

$$\frac{\partial ى}{\partial ب} = ٢ \text{ مجـ } (ص - أ س - ب) \times (- ١)$$

$$، \frac{\partial ى}{\partial أ} = ٢ \text{ مجـ } (ص - أ س - ب) \times (- س)$$

ولايجاد النهاية الصغرى نساوى المشتقات الجزئية بالصفر نجد أن :

ـ ٢ مجـ (ص ـ أ س ـ ب) = صفر

ـ ٢ مجـ (ص ـ أ س ـ ب) = صفر

وبالقسمة على (-٢) وبفك الأقواس وترتيب الحدود ينتج لنا المعادلتين التاليتين:

مجـ ص = أ مجـ س + ن ب .... (٣)

مجـ س ص = أ مجـ س ٢ + ب مجـ س .... (٤)

وبحل المعادلتين القياسيتين السابقتين (٣) ، (٤) معاً فإنه يمكن تقدير

الثـوابت (أ ، ب) [*] وبالتالى يتحدد خط الانحدار - الخط المستقيم الأمثل (النظرى) - الذى يمثل البيانات المشاهده الناتجه عن إستخدام طريقه المربعات الصغرى (Least Squares method) عند شروط محدده ، وتأخذ معادله خط الانحدار – أو معادلة التقدير أو (التنبؤ) – الصورة التالية:

صً = أ س + ب (التـنـبـؤ) .... (٥)

حيث :

(أ) عبارة عن معامل الإنحدار (Regression coefficient) أو ميل خط الانحدار للتنبؤ بقيم ص من س تكتب (ص / س) وهو يمثل معدل الزيادة أو النقص فى قيم ص لكل زيادة فى المتغير المستقل (س) قدرها وحدة واحدة، وتتراوح قيمته ما بين (- ∞ ، + ∞)

فإذا كانت إشارة (أ) موجبه فذلك يعنى أن خط الانحدار يميل إلى أعلا جهة اليمين وبالتالى فإن العلاقة بين المتغيرين تكون علاقة طردية .

أما اذا كانت إشارة (أ) سالبه فذلك يعنى أن خط الانحدار يميل إلى أسفل جهة اليمين وبالتالى فإن العلاقة بين المتغيرين تكون علاقة عكسية .

مما تقدم يتضح لنا أن اشاره معامل الانحدار (أ) توضح طبيعته العلاقة بين المتغيرين موضع الدراسة .

، (ب) ثابت الإنحدار (Regression Constant) أو قيمه المتغير ص عند تقاطعه مع خط الإنحدار أى عندما س = صفر .

وعليه فإن :

$$أ = \frac{\frac{مجـ\ س\ ص}{ن} - \frac{مجـ\ س}{ن} \times \frac{مجـ\ ص}{ن}}{\frac{مجـ\ س^{2}}{ن} - \left(\frac{مجـ\ س}{ن}\right)^{2}} \quad .... (٦)$$

(*) ممكن إستخدام طرق (الحذف، المصروفات ، والمحددات) لتحديد ثوابت هذه المعادلات، راجع أساسيات الرياضيات للمؤلف ، مرجع سابق .

$$، ب = \frac{مجـ ص}{ن} - أ \times \frac{مجـ س}{ن} \quad ....\quad (٧)$$

أو ب = $\bar{ص}$ - أ $\bar{س}$

حيث ن = عدد أزواج القيم

مثال (١) :

حدد معادلة خط انحدار ص / س من البيانات التاليه باعتبار أن العلاقة بينهما يمثلها خط مستقيم باستخدام طريقه المربعات الصغرى ، ثم حدد قيمه ص عندما س = ٥٠

س	٦	١٢	١٠	١٠	٤	٢٠
ص	٦	٨	٤	١٠	٢	١٤

الحـل :

∴ خط انحدار ص / س على شكل :

ص = أ س + ب

$$∴ أ = \frac{\frac{مجـ س ص}{ن} - \frac{مجـ س}{ن} \times \frac{مجـ ص}{ن}}{\frac{مجـ س^{٢}}{ن} - \left(\frac{مجـ س}{ن}\right)^{٢}}$$

$$، ب = \frac{مجـ ص}{ن} - أ \times \frac{مجـ س}{ن}$$

فإنه يلزم إنشاء الجدول التالى التالى لتحديد قيمة (أ) معامل الانحدار، وقيمة (ب) ثابت الانحدار.

س	ص	س ص	س^{٢}
٦	٦	٣٦	٣٦
١٢	٨	٩٦	١٤٤
١٠	٤	٤٠	١٠٠
١٠	١٠	١٠٠	١٠٠
٤	٢	٨	١٦
٢٠	١٤	٢٨٠	٤٠٠
٦٢	٤٤	٥٦٠	٧٩٦

وحيث أن ن = ٦

$$\therefore أ = \frac{\frac{٥٦٠}{٦} - \frac{٦٢}{٦} \times \frac{٤٤}{٦}}{\frac{٧٩٦}{٦} - \left(\frac{٦٢}{٦}\right)^{٢}} = ٠,٦٨$$

$$، \quad ب = \frac{٤٤}{٦} - ٠,٦٨ \times \frac{٦٢}{٦} = ٠,٣١$$

وتصبح معادلة خط انحدار ص/س

ضَ = ٠,٦٨ س + ٠,٣١

تقدير قيمة ص عندما تكون قيمة س = ٥٠

∴ ضَ = ٠,٦٨ س + ٠,٧١

وبالتعويض عن قيمة ص = ٥٠ فى المعادلة الانحدارية السابقة

∴ ص = ٠,٦٨ × ٥٠ + ٠,٣١

= ٣٤ + ٠,٣١ = ٣٤,٣١

مثال (٢) :

الجدول التالى يوضح المبيعات الكليه بأحد فروع شركات السيارات باحدى الدول (بالمليون جنيه) خلال المدة من ١٩٨٥ ـ ١٩٩٥ (*)

السنه س	١٩٨٥	١٩٨٦	١٩٨٧	١٩٨٨	١٩٨٩	١٩٩٠	١٩٩١	١٩٩٢	١٩٩٣	١٩٩٤	١٩٩٥
المبيعات ص	١٤٠	١٥١	١٥٦	١٦١	١٧٣	١٨٥	١٩٣	١٩٩	٢٠٦	٢٢٠	٢١٣

والمطلوب :

(أ) تحديد معادله خط انحدار ص/س بفرض أنه مستقيم .

(ب) باستخدام المعادلة فى البند (أ) السابقة تنبأ بمبيعات هذا الفرع عام ٢٠٠٠ .

الحـل :

فى مثل هذه الحالات سنعتبر س (السنوات) المتغير المستقل ولكى يأخذ المتغير س قيم سهله الإستخدام فلا بد أن نحدد(سنه قياسيه)ونعتبرها هى الزمن الصفرى (سنة الأساس) ، مع اعتبار سنه المبيعات كوحدة للزمن . ومن ثم اذا اعتبرنا عام ١٩٨٥ هى السنه المختاره كزمن صفرى أى سنه ١٩٨٥ (س) = صفر مثلا فأن الاعوام التاليه لها ستأخذ القيم ١ ، ٢ ، ٣ ، .... الخ ثم نستخدم نفس الخطوات السابق إتباعها فى المثال رقم (١) السابق وعليه فإن الجدول التالى سيساعد فى تحديد ثوابت خط الانحدار المطلوب .

(*) الظاهرة التى تتغير مع مرور الزمن ، يطلق عليها سلسلة زمنيه ، وعادة ما يستخدم إسلوب تحليل الإنحدار فى تعيين الاتجاه العام للسلسله الزمنيه ، وسنناقش ذلك تفصيلا فى فصل السلاسل الزمنية .

السنه	المبيعات ص	س باعتبار السنه الصفريه عام ٨٥	س ص	س ٢
١٩٨٥	١٤٠	صفر	صفر	صفر
٨٦	١٥١	١	١٥١	١
٨٧	١٥٦	٢	٣١٢	٤
٨٨	١٦١	٣	٤٨٣	٩
٨٩	١٧٣	٤	٦٩٢	١٦
٩٠	١٨٥	٥	٩٢٥	٢٥
٩١	١٩٣	٦	١١٥٨	٣٦
٩٢	١٩٩	٧	١٣٩٣	٤٩
٩٣	٢٠٦	٨	١٦٤٨	٦٤
٩٤	٢٢٠	٩	١٩٨٠	٨١
٩٥	٢١٣	١٠	٢١٣٠	١٠٠
المجموع	١٩٩٧	٥٥	١٠٧٢٢	٣٨٥

حيث ن = ١١

(أ) ∴ خط انحدار ص / س على شكل

ص = أس + ب

$$\therefore أ = \frac{\frac{مجـ\,س\,ص}{ن} - \frac{مجـ\,س}{ن} \times \frac{مجـ\,ص}{ن}}{\frac{مجـ\,س^{2}}{ن} - \left(\frac{مجـ\,س}{ن}\right)^{2}}$$

$$\therefore أ = \frac{\frac{10722}{11} - \frac{55}{11} \times \frac{1997}{11}}{\frac{385}{11} - \left(\frac{55}{11}\right)^{2}} =$$

$$= \frac{٦٧,٠٠٢}{١٠} = ٦,٧$$

$$ب = \frac{١٩٩٧}{١١} - ٦,٧ \times \frac{٥٥}{١١}$$

= ١٨١,٥٤٥ ـ ٣٣,٥٠٠ = ١٤٨,٠٤٥

وتصبح معادله خط إنحدار ص / س

$\hat{ص}$ = ٦,٧ س + ١٤٨,٠٤٥

(ب) التنبؤ بقيمه ص عام ٢٠٠٠

∴ س = (تاريخ سنة التقدير – تاريخ السنة الصفرية (أو سنة الأساس)

∴ س = ٢٠٠٠ ـ ١٩٨٥ = ١٥

∴ $\hat{ص}$ = ٦,٧ × ١٥ + ١٤٨,٠٤٥

= ٢٤٨,٥٤٥ مليون جنيه

مثال (٣):

لتسهيل العمليات الحسابيه فى المثال السابق (٢) يمكن إعتبار السنه الصفريه (سنه الاساس) هى السنه المتوسطه فى سلسلة سنوات المبيعات المعطاه وحيث أن سنوات السلسله المعطاه (١٩٨٥ ـ ١٩٩٥) = ١١ سنه فيمكن اعتبار السنه الصفريه (سنة الأساس) هى السنة التى ترتيبها (٦) أى عام ١٩٩٠، ووحدة الزمن (سنة) وعليه تصبح السنوات السابقة لعام ١٩٩٠ (سالبة) والسنوات اللاحقة لعام ١٩٩٠ (موجبة) وعليه يصبح جدول حسابات معادلة خط الانحدار كما يلى:

السنه	المبيعات ص	س باعتبار السنه الصفريه عام ٩٠	س ص	$س^2$
١٩٨٥	١٤٠	٥_	٧٠٠_	٢٥
٨٦	١٥١	٤_	٦٠٤_	١٦
٨٧	١٥٦	٣_	٤٦٨_	٩
٨٨	١٦١	٢_	٣٢٢_	٤
٨٩	١٧٣	١_	١٧٣_	١
٩٠	١٨٥	صفر	صفر	صفر
٩١	١٩٣	١+	١٩٣	١
٩٢	١٩٩	٢+	٣٩٨	٤
٩٣	٢٠٦	٣+	٦١٨	٩
٩٤	٢٢٠	٤+	٨٨٠	١٦
٩٥	٢١٣	٥+	١٠٦٥	٢٥
المجموع	١٩٩٧	صفر	٣١٥٤ ٢٢٦٧_ ٨٨٧+	١١٠

$$\therefore \text{أ} = \frac{\frac{\text{مجـ س ص}}{\text{ن}} - \frac{\text{مجـ س}}{\text{ن}} \times \frac{\text{مجـ ص}}{\text{ن}}}{\frac{\text{مجـ س}^2}{\text{ن}} - \left(\frac{\text{مجـ س}}{\text{ن}}\right)^2}$$

وفى مثالنا رقم (٣) السابقحيث أن مجـ س = صفر دائما فإن :

$$\text{أ} = \frac{\frac{\text{مجـ س ص}}{\text{ن}}}{\frac{\text{مجـ س}^2}{\text{ن}}} = \frac{\text{مجـ س ص}}{\text{مجـ س}^2} \quad \text{.....(٨)}$$

وعليه فأن :

$$أ = \frac{887}{110} = 8,06$$

$$، ب = \frac{مجـ ص}{ن} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

$$(لأن - أ \frac{مجـ س}{ن} = صفر دائما)$$

$$أى أن ب = \frac{1997}{11} = 181,545$$

وعليه ستصبح معادله خط إنحدار ص/س (باعتبار سنه الاساس عام 1990) هى :

$$\hat{ص} = 8,06 س + 181,545$$

وللتنبؤ بالمبيعات عام 2000 فأن

س = تاريخ سنة التنبؤ - تاريخ السنة الصفرية (سنة الأساس)

$$= 2000 - 1990 = 10$$

$$\therefore \hat{ص} = 8,06 \times 10 + 181,545$$

$$= 80,6 + 181,545$$

$$= 262,145 \quad \text{مليون جنيه}$$

(3) خـط إنحـدار س / ص :

ممكن إن يكون هناك خط إنحدار آخر لنفس البيانات الاحصائيه التى سبق أن حددنا منها خط إنحدار ص/س أى أنه يمكن تعميم ما سبق بالنسبه لانحدار ص/س لتعيين معادله إنحدار س/ص لكن فى الحالة الأخيرة سنفترض وجود علاقة خطية بين س ، ص ، وأن س تمثل المتغير التابع ، ص تمثل المتغير المستقل ويكون معادلة خط إنحدار س/ص على الوجه التالى:

$$\hat{س} = م\,ص + حـ \quad ....(١٠)$$

حيث (م) معامل أنحدار س/ص ويلاحظ هنا أننا رمزنا للثوابت برموز مختلفه (م ، حـ) عنه في معادله ص/س مما يشير إلى أنه ليس ضروريا أن يكون أ = م أو ب = حـ أو كلاهما .

كما أن ميل خط الانحدار للتنبؤ بقيم س من ص بطريقة المربعات الصغرى (*) ويمكن الحصول عليه من المعادلة التالية.

$$م = \frac{\frac{مجـ\,س\,ص}{ن} - \frac{مجـ\,س}{ن} \times \frac{مجـ\,ص}{ن}}{\frac{مجـ\,ص^{٢}}{ن} - \left(\frac{مجـ\,ص}{ن}\right)^{٢}} \quad .....(١١)$$

، (حـ) ثابت الانحدار أو قيمه المتغير س عند تقاطعه مع خط الانحدار أي عندما ص = صفر ، ويمكن الحصول عليه من المعادلة التاليه :

$$حـ = \frac{مجـ\,س}{ن} - م \times \frac{مجـ\,ص}{ن} \quad ....(١٢)$$

لكن قبل اعطاء أمثله توضح كل ما تقدم يجب أن نشير هنا إلى تساؤلين هامين (إذا كانت لنفس البيانات الاحصائيه) ، أولهما هل نحصل على خطى انحدار دائماً من نفس البيانات الاحصائية، وثانيهما هل يتقاطع خطى الإنحدارعند نقطه محددة إحداثياتها ($\bar{س}$ ، $\bar{ص}$) .

والاجابة على التساؤلين السابقين تتلخص فيما يلي :

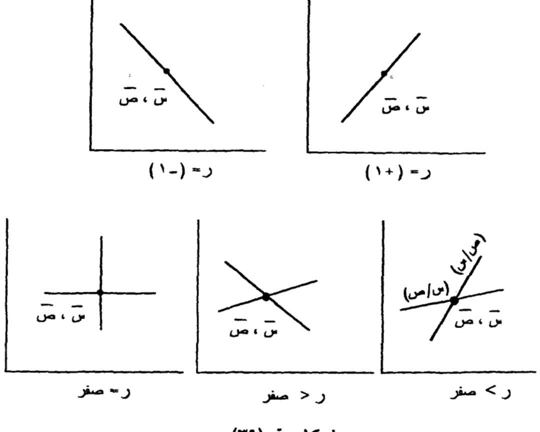
(١) اذا كان الارتباط تام (± ١) بين المتغيرين س ، ص نجد أن جميع النقاط في شكل الانتشار تقع على خط مستقيم ومن ثم فأن خط الانحدار (ص / س) هو نفس خط انحدار (س / ص) .

(*) مجـ س = م مجـ ص + ن حـ

مجـ س ص = م مجـ ص^{٢} + حـ مجـ ص

٢ ـ عندما لا يكون الارتباط تاما بين س ، ص هنا يختلف خط انحدار (ص/س) عن خط انحدار (س / ص).

ويتضح هذا الأختلاف من الشكل التالى الذى يوضح الاوضاع التقريبية لخطى الانحدار عند بعض قيم معامل الارتباط بين المتغيرين.



شكل رقم (٣٩)

٣ ـ فى كافة الأحوال السابقه (فيما عدا حالات الأرتباط التام) يتباعد خطى الانحدار عن بعضهما البعض تدريجيا ويصل هذا التباعد الى حده الأقصى عندما ر = صفر ، لكن فى كافة الأحوال السابقه يتقاطع خطى الانحدار فى نقطه ثابته إحداثياتها س̄ ، ص̄ للمتغيرين .

مثال (٤) :

حل المثال رقم (١) السابق بإعتبار أن س المتغير التابع ، ص المتغير المستقل .

الحـل :

لتحديد معادله خط انحدار س / ص فى صورة خط مستقيم

$\hat{س} = م\ ص + حـ$

يلزم اعداد الجدول التالى :

ص	س	س ص	ص^٢
٦	٦	٣٦	٣٦
٨	١٢	٩٦	٦٤
٤	١٠	٤٠	١٦
١٠	١٠	١٠٠	١٠٠
٢	٤	٨	٤
١٤	٢٠	٢٨٠	١٩٦
٤٤	٦٢	٥٦٠	٤١٦

و حيث أن ن = ٦

$$، م = \frac{\frac{٥٦٠}{٦} - \frac{٦٢}{٦} \times \frac{٤٤}{٦}}{\frac{٤١٦}{٦} - \left(\frac{٤٤}{٦}\right)^{٢}}$$

$$= \frac{٩٣,٣٣٣ - ٧٥,٧٧٨}{٦٩,٣٣٣ - ٥٣,٧٧٨}$$

$$= \frac{١٧,٥٥٥}{١٥,٥٥٥} = ١,١٢٩$$

$$، حـ = \frac{٦٢}{٦} - ١,١٢٩ \times \frac{٤٤}{٦}$$

$$= ١٠,٣٣٣ - ١,١٢٩ \times ٧,٣٣٣$$

$$= ١٠,٣٣٣ - ٨,٢٧٩$$

$$= ٢,٠٥٤$$

وتكون معادله خط انحدار س/ص هى

$$\hat{س} = ١,١٢٩ \text{ ص} + ٢,٠٥٤$$

(وبالطبع تختلف عن خط انحدار ص/س لنفس البيانات الاحصائيه)

(٤) الخطأ المعيارى لمعادلة الإنحدار(*) (Standard Error of Estimate)

إن الهدف الأساسى من تقدير معادله إنحدار ص/س أو س/ص هو إستخدامهما فى التنبؤ بقيم المتغير التابع التى تناظر قيم معينه للمتغير المستقل ، ومن ثم فكلما زادت دقة تحديد معادلة الانحدار كلما زادت دقة التنبؤ أو التقدير والذى يعتبر أساسا هاما للتخطيط السليم فى كافة المجالات محل الدراسة .

لكل ما سبق كان على الباحثين الإحصائيين التأكد من دقة تقدير معادله الانحدار ، أو بمعنى آخر قياس خطأ التقدير فى معادلة الانحدار وبالطبع كلما صغر هذا الخطأ كلما زادت دقة تقدير معادله الانحدار وبالتالى دقة التنبؤ ، والعكس صحيح.

و قد تم التوصل إلى ما سبق عن طريق مقياس إحصائى يحدد درجة الإختلاف بين القيم الفعليه للمتغير التابع (ص) والقيم المقدرة ($\hat{ص}$) فى

(*) يجب عدم الخلط بين الخطأ المعيارى ، والانحراف المعيارى ، فبرغم أنهما يعتبران مقياسين للتشتت إلا أن الأول يقيس التشتت حول خط الانحدار بينما يقيس الثانى التشتت حول الوسط الحسابى ، كما أن الأول يستخدم لإختبار مدى دقة توفيق الخط المستقيم .

حالة انحدار ص/س أو القيم الفعلية للمتغير التابع (س) والقيم المقدرة ($\hat{س}$) في حالة إنحدار س/ص وذلك كما يلي :

أولا : الخطأ المعياري في حالة خط إنحدار ص/س سنرمز له بالرمز($ع_{ص/س}$) :

$$ع_{ص/س} = \sqrt{\frac{مجـ (ص - \hat{ص})^2}{ن}} \qquad ....(١٣/أ)$$

ويمكن كتابه المعادلة السابقة على الصورة التالية :

$$ع_{ص/س} = \sqrt{\frac{مجـ ص^2 - ب مجـ ص - أ مجـ س ص}{ن}} \qquad ...(١٣/ب)$$

ثانيا : الخطأ المعياري في حالة خط انحدار س/ص وسنرمز له بالرمز ($ع_{س/ص}$)

$$ع_{س/ص} = \sqrt{\frac{مجـ (س - \hat{س})^2}{ن}} \qquad ....(١٤/أ)$$

ويمكن كتابه المعادله السابقه على الصورة التاليه :

$$ع_{س/ص} = \sqrt{\frac{مجـ س^2 - جـ مجـ س - م مجـ س ص}{ن}} \qquad ......(١٤/ب)$$

مثال (٥) :

من المثالين (١) ، (٤) السابقين أوجد قيمة كلا من :

أولا : $ع_{ص/س}$ ثانيا : $ع_{س/ص}$

الحـــل :

أولا : $ع_{ص/س}$:

س	ص	ص̂ = ٠,٤١٢٥ س + ٣,٠٧١	(ص - ص̂)	(ص - ص̂)^٢
٦	٦	٥,٤٦ = ٣,٠٧١ + ٦ × ٠,٤١٢٥	,٤٥٤٠	٠,٢٠٦١
١٢	٨	٨,٠٢١ = ٣,٠٧١ + ١٢ × ٠,٤١٢٥	٠,٠٢١ -	,٠٠٠٤
١٠	٤	٧,١٩٦ = ٣,٠٧١ + ١٠ × ٠,٤١٢٥	٣,١٩٦ -	١٠,٢١٤٠
١٠	١٠	٧,١٩٦ = ٣,٠٧١ + ١٠ × ٠,٤١٢٥	٢,٨٠٤	٧,٨٦٢٤
٤	٢	٤,٧٢١ = ٣,٠٧١ + ٤ × ٠,٤١٢٥	٢,٧٢١ -	٧,٤٠٨٣
٢٠	١٤	١١,٣٢١ = ٣,٠٧١ + ٢٠ × ٠,٤١٢٥	٢,٦٧٩	٧,١٧٧٠
٦٢	٤٤		صفر	٣٢,٨٦٨٢

$$\therefore \text{ع}_{\text{ص/س}} = \sqrt{\frac{\text{مجـ}\,(\text{ص} - \hat{\text{ص}})^{٢}}{\text{ن}}}$$

$$= \sqrt{\frac{٣٢,٨٦٨٢}{٦}}$$

$$= \sqrt{٥,٤٧٨٠٣}$$

$$= ٢,٣٨$$

طريقة أخرى

$$\therefore \text{ع}_{\text{ص/س}} = \sqrt{\frac{\text{مجـ ص}^{٢} - \text{ب مجـ ص} - \text{أ مجـ س ص}}{\text{ن}}}$$

ومن بيانات حل المثال رقم (١) السابق حصلنا على تقدير معادلة خط انحدار ص/س ومنها نجد أن :

مجـ ص = ٤٤ ، ب = ٣,٠٧١

، أ = ٠,٤١٢٥ ، مجـ س ص = ٥٦٠ ، ن = ٦

وعليه فأن :

$$ع_{ص/س} = \sqrt{\frac{٤١٦ - ٣,٠٧١ \times ٤٤ - ٠,٤١٢٥ \times ٥٦٠}{٦}}$$

$$= \sqrt{\frac{٤١٦ - ٣٦٦,١٢٤}{٦}}$$

$$= \sqrt{٨,٣١٢}$$

$$= ٢,٣٨٨$$

ثانيا :

$$\therefore ع_{س/ص} = \sqrt{\frac{مجـ س^{٢} - حـ مجـ س - م مجـ س ص}{ن}}$$

ومن بيانات حل المثال رقم (٤) السابق حصلنا على تقدير معادلة خط انحدار س/ص ومنها نجد أن :

مجـ س = ٦٢ ، حـ = ٢,٠٥٤ ، م = ١,١٢٩ ، مجـ س ص = ٥٦٠
، ن = ٦

وعليه فإن :

$$ع_{س/ص} = \sqrt{\frac{٧٩٦ - ٢,٠٥٤ \times ٦٢ - ١,١٢٩ \times ٥٦٠}{٦}}$$

$$= \sqrt{\frac{٧٩٦ - ٧٥٩,٥٨٨}{٦}}$$

$$= \sqrt{٦,٠٦٩}$$

$$= ٢,٤٦$$

المبحث الثانى

الإرتبـــاط ، Correlation ،

مقدمـة :

فى المبحث الأول من هذا الفصل تمت دراسة العلاقه بين متغيرين(س ، ص) أحدهما متغير مستقل والأخر متغير تابع ، حيث أنه عن طريق الإنحدار أمكن قياس العلاقة الرياضية بين المتغير التابع والمتغير المستقل وبإستخدام معادلة خط الإنحدار أمكننا أن نتنبأ بقيمة المتغير التابع بمعلومية قيمة للمتغير المستقل، فى حين أن الإرتباط يقيس لنا قوة العلاقة بين المتغيرين س ، ص بصرف النظر عن أيهما متغير تابع وأيهما متغير مستقل، ويهدف الإرتباط إلى قياس العلاقة بين المتغيرات من حيث القوة والإتجاه، فتأثر متغير بما يطرأ على متغير آخر من تغير يدل على أن بين المتغيرين علاقة أو أن هناك إرتباط بينهما بينما عدم التأثر يدل على إنعدام كل من العلاقة والإرتباط بينهما.

فإذا كان لدينا عدد (ن) من أزواج القيم ($س_1$ ، $ص_1$)، ($س_2$ ، $ص_2$) ، ($س_3$ ، $ص_3$) ، .... ($س_ن$ ، $ص_ن$) للمتغيرين س ، ص سواء تم الحصول على أزواج القيم المشار إليها من مصادر تاريخيه ، أو مصادر ميدانيه وأردنا دراسة العلاقة الارتباطية بينهما، فيتم تنظيم قيم كل من عناصر المتغير الأول فى عمود، وعناصر المتغير الآخر فى عمود ثانى إذا كانت أزواج القيم قليلة، إما إذا كان عدد أزواج القيم كبيراً فيتم تبويبها فى جدول تكرارى مزدوج.

وهناك اكثر من طريقة لمعرفة طبيعة العلاقة بين متغيرين أو اكثر من أهمها :

(أ) شكل الإنتشار

(ب) تلخيص البيانات فى معامل واحد هو ، معامل الإرتباط ، سواء أكانت البيانات كمية أو كانت البيانات وصفية.

وبناء على عدد المتغيرات التى تدخل فى حساب معامل الإرتباط فإنه يمكن حصر أنواع الإرتباط فيما يلى.

أولاً : الإرتبـاط الخطى بين متغـيرين سـواء كان.

أ ـ إرتبـاط خطى بسـيط ، Simple Correlation ، وهو الإرتبـاط بين **ظاهرتين أو متغيرين فقط ككمية المحصول وكمية السماد المستعمل .**

ب ـ إرتباط جزئى ، Partial correlation ،

ثانيا : الارتباط المتعدد ، mltiple Correlation ، بين متغير من جهه ومتغيرين أو أكثر من جهة أخرى، كدراسة العلاقة بين كميه المحصول وكل من كمية السماد وكمية مياه الرى ، ونوع التربة ، وطريقة الزراعة ... الخ .

وسنهتم فى هذه المرحلة بالإرتباط الخطى البسيط بإستخدام كل من:

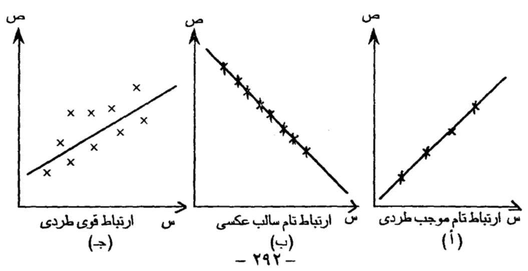
(أ) شكل الانتشار .

وهو شكل بيانى يعطى فكره مبدئيه عن إتجاه وقوة العلاقة دون تحديد **لقيمة معامل الإرتباط، حيث يمثل كل زوج من أزواج القيم المتناظرة للمتغيرين س، ص بنقطة فى مجال شكل الانتشار، وبذلك يتكون لدينا عدد من النقاط"الاحداثيات"يساوى عدد أزواج القيم، وشكل إتجاه النقاط المتتابع يعطى صورة تقريبية للعلاقة الارتباطية بين المتغيرين س ، ص من حيث :**

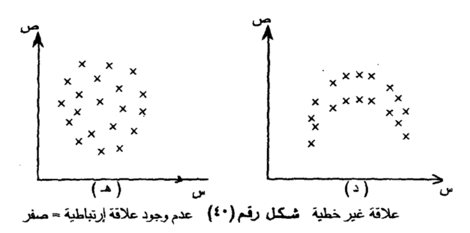
١ ـ نوع هذه العلاقة خطيه أم غير خطيه .

٢ ـ إتجاة العلاقة طردية أم عكسية .

ويتضح لنا ما تقدم من الأشكال الانتشاريه التاليه .



ارتباط تام موجب طردى (أ) — ارتباط تام سالب عكسى (ب) — ارتباط قوى طردى (جـ)



علاقة غير خطية **شكل رقم (٤٠)** عدم وجود علاقة إرتباطية = صفر

ففى الشكل (أ) هناك علاقة إرتباط تامه طرديه حيث نجد أن الزيادة فى أحد المتغيرين مصحوبه بزياده فى المتغير الثانى بنفس النسبه لذا وقعت كل نقاط الإحداثيات على خط مستقيم.

أما فى الشكل (ب) هناك علاقة إرتباطية تامة عكسية حيث نجد أن النقص فى أحد المتغيرين يقابله زيادة فى المتغير الآخر وبنفس النسبة ، لذا وقعت كل نقاط الإحداثيات على خط مستقيم.

أما فى الشكل (حـ) فهناك علاقة إرتباطية قوية موجبة ، حيث أن الزيادة فى المتغير الأول يتبعها زيادة فى المتغير الثانى لكن ليست بنفس النسبة، ويكون توزيع نقاط الإحداثيات قريبا من خط مستقيم .

أما فى الشكل (د) فهناك علاقة إرتباطية ولكنها ليست خطيه أى علاقة إرتباطية غير خطيه لذا نجد أن نقاط الاحداثيات ليست فى اتجاه ثابت مستقيم ولكن فى شكل منحنى.

أما فى الشكل (هـ) فليست هناك علاقة إرتباطية بين التغير فى المتغير الأول والتغير فى المتغير الثانى – لذا نجد أن نقاط الاحداثيات منتشرة فى جميع الإتجاهات. (أى ليست فى صورة خط مستقيم أو شبه مستقيم، كما أنها ليست فى صورة منحنى من أيه درجة).

مما تقدم يتضح لنا أنه اذا إنحصرت نقاط احداثيات (س ، ص) فى شكل الانتشار داخل قطاع ضيق دل ذلك على وجود إرتباط قوى أما إذا انحصرت النقاط داخل دائرة دل ذلك على ضعف الارتباط أو إنعدامه بينهما.

(ب) معامل الإرتباط (Correlation Coefficient) بين متغيرين ويرمز له بالرمز (ر – r) (*) :

هو مقياس وصفي لا يتأثر بوحدات القياس يلخص العلاقة الإرتباطية من حيث القوة أو الاتجاه بين ظاهرتين أو متغيرين في رقم واحد يطلق عليه معامل الإرتباط، حيث يأخذ هذا المعامل أى قيمه بين (ـ ١ ، + ١) حيث القيمة تدل على قوة الإرتباط، كما تدل الإشارة على إتجاه العلاقة الإرتباطية.

وقد صنف البعض (**) قوة هذه العلاقة إلى مستويات وفقاً لما يأتي:

مدى فئة معامل الارتباط	التفسير
صفر ـ ٠,٣٠	ضعيف جدا
,٣٠ ـ ٠,٥٠	ضعيف
٠,٥٠ ـ ٠,٧٠	متوسـط
٠,٧٠ ـ ٠,٩٠	قـوى
٠,٩٠ ـ ١,	قوى جدا
± ١	تـام

وإن كان يرى البعض الآخر أن تفسير معامل الإرتباط يمكن أن يكون موقفيا.

ولنذهب فيما يلي الى كيفيه حساب معامل الارتباط الخطى البسيط، وهنا سنفترض أن الارتباط خاص بين متغيرين فقط ، أى تجاهل أى علاقات لهذين المتغيرين بأية متغيرات أخرى من ناحيه ، كما أن العلاقة الداليه بين المتغرين من الدرجة الأولى تمثل بيانياً بخط مستقيم، وسنتناول دراستنا قياس هذا المعامل لبيانات كمية غير مبوبة (مفردة) أو لبيانات كمية مبوبة في صورة جدول تكرارى، في البنود التالية:

(*) معامل بيرسون للارتباط ـ حيث توصل اليه البريطانى كارل بيرسون سماه معامل ضرب العزوم للإرتباط.

(**) هنكل وآخرون.

أولا : معامل بيرسون للإرتباط لبيانات مفرده :

(أ) اذا كان لدينا متغيرين س ، ص توجد بينهما علاقة خطيه بسيطه فإذا سحبنا عينه حجمها (ن) من أزواج القيم المتناظرة التالية .

المتغير س : $س_1$ ، $س_2$ ، $س_3$ ، .... ، $س_ن$.

المتغير ص : $ص_1$ ، $ص_2$ ، $ص_3$ ، .... ، $ص_ن$.

وكان الوسط الحسابى لقيم كل من المتغير س هو ($\bar{س}$) والمتغير ص هو ($\bar{ص}$) والانحراف المعيارى لهما ($ع_س$ ، $ع_ص$) على الترتيب .

ولما كان : ن $\bar{س}$ = مجـ س ، ن $\bar{ص}$ = مجـ ص

، ن $ع^2_س$ = مجـ $(س - \bar{س})^2$ ، ن $ع^2_ص$ = مجـ $(ص - \bar{ص})^2$

كما أن الارتباط بين المتغيرين س ، ص يعنى أن التغير فى أحدهما يكون - عموماً - مصحوباً بتغير فى الآخر، فإذا قلنا أن التغير فى كمية مثل (س) أو (ص) فمقدار هذا التغير يساوى الفرق بين القيم التى تأخذها (س)، ووسطها الحسابى ($\bar{س}$) ونفس الأمر بين (ص) ، ($\bar{ص}$) .

أو بعباره أخرى سنعتمد هنا لقياس معامل الإرتباط على انحرافات القيم عن وسطها الحسابى وعليه فإن معامل بيرسون للارتباط يعرف كالآتى :

$$ر = \frac{غ_{س ص}}{ع_س . ع_ص} \quad .... \quad (1)$$

حيث غ س ص تعرف بالتغاير (Covariance) بين س ، ص ويحسب بالصيغه التاليه .

$$غ_{س ص} = \frac{مجـ (س - \bar{س}) (ص - \bar{ص})}{ن}$$

ويعبر عن اتجاة العلاقة بين س، ص.

ونظراً لإحتمال إختلاف وحدات القياس فى كل من س، ص فقد تشير س

إلى العمر بالسنين مثلا ، ص تدل على الوزن بالكيلو جرامات هذا بجانب إختلاف تشتتهما ، مما يفسد المقارنه بين هذه الإنحرافات على علاتها وللتغلب على المشكله السابقه - إختلاف وحدات القياس بين المتغيرين - فقد إستخدم **بيرسون الوحدات المعيارية كما يلي :**

$$\left(\frac{س - \bar{س}}{ع_{س}} \right) ، \left(\frac{ص - \bar{ص}}{ع_{ص}} \right)$$

وعليه يصبح معامل بيرسون للارتباط على الصورة :

$$ر = \frac{مجـ (س - \bar{س})(ص - \bar{ص})}{\sqrt{مجـ (س - \bar{س})^{٢} \ مجـ (ص - \bar{ص})^{٢}}} \quad .... (٢)$$

(ب) حساب معامل الإرتباط الخطى البسيط بإستخدام القيم الأصليه مباشرة .

إن حساب معامل الارتباط باستخدام المعادله (٢) تقتضى حساب كل من س ، ص فإذا ما كانت قيمتهما كسريه فى مثل هذه الحاله ستتعقد العمليات الحسابيه ، مع زيادة إحتمالات الوقوع فى الخطأ ، للأسباب السابقة فإنه من الأسهل حساب معامل الإرتباط باستخدام المعادله التاليه والتى تعتمد على القيم الأصليه مباشره لكل من س، ص دون تحويلها إلى قيم معياريه .

$$ر = \frac{\frac{مجـ س ص}{ن} - \frac{مجـ س}{ن} \times \frac{مجـ ص}{ن}}{\sqrt{\frac{مجـ س^{٢}}{ن} - \left(\frac{مجـ س}{ن}\right)^{٢}} \sqrt{\frac{مجـ ص^{٢}}{ن} - \left(\frac{مجـ ص}{ن}\right)^{٢}}} \quad .... (٣)$$

حيث (ن) تمثل عدد أزواج القيم للمتغيرين .

ويفضل إستخدام المعادله (٣) اذا كانت قيم س ، ص صغيره نسبيا .

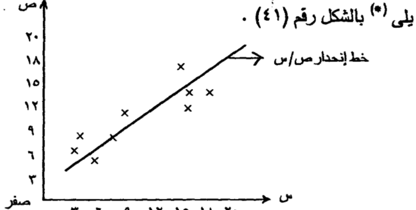
مثال (١) :

الجدول التالى لدرجات عشره من طلاب الكليه فى إمتحان مادتى ، الرياضيات (س) ، الاقتصاد (ص) والمطلوب حساب معامل الارتباط بين س ، ص باستخدام القيم الأصليه مباشرة .

س	١٢	١٢	٨	٨	٥	٨	١٤	٦	١٠
ص	١٧	١٥	١٢	٧	١٠	١٥	١٦	١١	١٩

الحـل :

طالما أنه ليس لدينا فكرة محـددة عن إتجاه العلاقـة بين س ، ص لذا يفضل أن تحدد إتجاه العلاقه باستخدام شكل الأنتشار لكـل من س ، ص كما يلى [*] بالشكل رقم (٤١) .



ومن الشكل الانتشارى يتضح وجود علاقه خطيه طرديه بين المتغيرين س، ص .

ومن واقع النتيجة السابقة ـ التى لم تذكر فى سياق المثال ـ عن طبيعه العلاقه بين كلا من درجات الطلاب فى الرياضيات (س) والاقتصاد (ص)

(*) لوجاء فى سياق المثال أن العلاقه بين س، ص خطيه (أو فى صورة خط مستقيم) فى هذه الحاله لن تجرى عمليه شكل الأنتشار المشار إليها

والتى أتضح أنها علاقه خطية ـ لذا سنستخدم معادله معامل الارتباط الخطى البسيط لقياس هذه العلاقه وهى :

$$\text{ر} = \frac{\dfrac{\text{مجـ س ص}}{\text{ن}} - \dfrac{\text{مجـ س}}{\text{ن}} \times \dfrac{\text{مجـ ص}}{\text{ن}}}{\sqrt{\dfrac{\text{مجـ س}^{٢}}{\text{ن}} - \left(\dfrac{\text{مجـ س}}{\text{ن}}\right)^{٢}} \sqrt{\dfrac{\text{مجـ ص}^{٢}}{\text{ن}} - \left(\dfrac{\text{مجـ ص}}{\text{ن}}\right)^{٢}}}$$

يقتضى منا إنشاء الجدول التالى للوصول إلى العلاقة الإرتباطيه المطلوبه .

س	ص	س ص	$\text{س}^{٢}$	$\text{ص}^{٢}$
١٢	١٧	٢٠٤	١٤٤	٢٨٩
١٢	١٥	١٨٠	١٤٤	٢٢٥
٨	١٢	٩٦	٦٤	١٤٤
٨	٧	٥٦	٦٤	٤٩
٥	١٠	٥٠	٢٥	١٠٠
٨	١٥	١٢٠	٦٤	٢٢٥
١٤	١٦	٢٢٤	١٩٦	٢٥٦
٦	١١	٦٦	٣٦	١٢١
١٠	١٩	١٩٠	١٠٠	٣٦١
٨٣	١٢٢	١١٨٦	٨٣٧	١٧٧٠

حيث ن = ١٠

$$\therefore \text{ر} = \frac{\dfrac{١١٨٦}{١٠} - \dfrac{٨٣}{١٠} \times \dfrac{١٢٢}{١٠}}{\sqrt{\dfrac{٨٣٧}{١٠} - \left(\dfrac{٨٣}{١٠}\right)^{٢}} \sqrt{\dfrac{١٧٧٠}{١٠} - \left(\dfrac{١٢٢}{١٠}\right)^{٢}}}$$

$$= \frac{١١,٦ - ٨,٣ \times ١٢,٢}{\sqrt{٨٣,٧ - ٦٨,٨٩} \times \sqrt{١٧٧,٠٠ - ١٤٨,٨٤}}$$

$$= \frac{١١٨,٦ - ١٠١,٢٦}{\sqrt{١٤,٨١} \times \sqrt{٢٨,١٦}}$$

$$= \frac{١٧,٣٤}{٣,٨٥ \times ٥,٣١}$$

$$= \frac{١٧,٣٤}{٢٠,١٤٤} = ٠,٨٥$$ (إرتباط قوى طردى)

(حـ) حساب معامل الإرتباط الخطى البسيط بإستخدام وسط فرضى :

ويفضل إستخدام هذه الطريقة فى حالتين اولهما : اذا كانت القيم الأصليه لـ س ، ص كبيرة نسبيا ثانيهما اذا أخذت كل من س ، ص أو كلاهما قيما كسريه أو قيم صحيحه وكسر ويكون معادلة معامل الإرتباط على الصورة :

$$ر = \frac{\frac{مجـ ح_س ح_ص}{ن} - \frac{مجـ ح_س}{ن} \times \frac{مجـ ح_ص}{ن}}{\sqrt{\frac{مجـ ح_س^٢}{ن} - (\frac{مجـ ح_س}{ن})^٢} \sqrt{\frac{مجـ ح_ص^٢}{ن} - (\frac{مجـ ح_ص}{ن})^٢}} \quad ...(٤)$$

حيث $ح_س = س - أ_١$ ، $أ_١$ وسط فرضى لقيم س

$ح_ص = ص - أ_٢$ ، $أ_٢$ وسط فرضى لقيم ص

مثال (٢) :

فيما يلى أطوال س (بالسنتيمتر) وأوزان ص (بالكيلو جرام) لعينة عشوائية مكونة من عشرة أشخاص.

الطول (س)	١٦٤	١٦٩	١٧٠	١٨٠	١٨١	١٦٥	١٦٠	١٦٧	١٧٠	١٧٢
الوزن (ص)	٦٩	٧٠	٥٥	٥٠	٦٣	٥٨	٦١	٦٠	٥٣	٥٠

والمطلوب :

حساب معامل الإرتباط الخطى البسيط بين طول الشخص ووزنه .

الحـل :

س	ص	$ح_س = (س - أ_١)$	$ح_ص = (ص - أ_٢)$	$ح_س\ ح_ص$	$ح^٢_س$	$ح^٢_ص$
١٦٤	٦٩	-٦	+٩	-٥٤	٣٦	٨١
١٦٩	٧٠	-١	+١٠	-١٠	١	١٠٠
١٧٠	٥٥	صفر	-٥	صفر	صفر	٢٥
١٨٠	٥٠	+١٠	-١٠	-١٠٠	١٠٠	١٠٠
١٨١	٦٣	+١١	+٣	+٣٣	١٢١	٩
١٦٥	٥٨	-٥	-٢	+١٠	٢٥	٤
١٦٠	٦١	-١٠	+١	-١٠	١٠٠	١
١٦٧	٦٠	-٣	صفر	صفر	٩	صفر
١٧٠	٥٣	صفر	-٧	صفر	صفر	٤٩
١٧٢	٥٠	+٢	-١٠	-٢٠	٤	١٠٠
$أ_١ = ١٧٠$	$أ_٢ = ٦٠$	-٢	-١١	-١٥١	٣٨٧	٤٦٩

بالتطبيق على المعادلة (٤) حيث ن = ١٠

$$\therefore ر = \frac{\frac{-١٥١}{١٠} - \frac{-٢}{١٠} \times \frac{-١١}{١٠}}{\sqrt{\frac{٣٨٧}{١٠} - \left(\frac{-٢}{١٠}\right)^٢} \sqrt{\frac{٤٦٩}{١٠} - \left(\frac{-١١}{١٠}\right)^٢}}$$

$$= \frac{-١٥,١ - ٢,٢}{\sqrt{٣٨,٧ - ٠,٠٤} \sqrt{٦٤,٦٩ - ٠,٠١٢}}$$

$$= \frac{-١٧,٣}{\sqrt{٣٨,٦٦} \times \sqrt{٤٦,٨٨٨}}$$

$$= \frac{-١٧,٣}{٦,٢٢ \times ٦,٨٥}$$

$$= \frac{-١٧,٣}{٤٢,٦١} = -٠,٤١$$ (إرتباط عكسى ضعيف)

(د) حساب معامل الارتباط الخطى البسيط بإستخدام الإنحرافات المختصرة :

وتستخدم فى نفس ظروف الطريقة (حـ) السابقه بشرط أن تقبل قيم $ح_س$ القسمه على عامل مشترك (بدون باق) وليكن ($ل_١$) ، كما تقبل قيم $ح_ص$ القسمة على عامل مشترك (بدون باق) وليكن ($ل_٢$) واستخدام الإجراء السابق سيساعد على تبسيط العمليات الحاسبية أكثر منه فى طريقة الوسط الفرضى (حـ) السابقة وتكون منعادلة معامل الارتباط فى هذه الحالة على صورة.

$$ر = \frac{\frac{مجـ\ ح'_س\ ح'_ص}{ن} - \frac{مجـ\ ح'_س}{ن} \times \frac{مجـ\ ح'_ص}{ن}}{\sqrt{\frac{مجـ\ ح'^٢_س}{ن} - \left(\frac{مجـ\ ح'_س}{ن}\right)^٢} \sqrt{\frac{مجـ\ ح'^٢_ص}{ن} - \left(\frac{مجـ\ ح'_ص}{ن}\right)^٢}} \quad .....(٥)$$

حيث :

$$ح'_{س} = \frac{ح_{س}}{ل_{١}} \quad ، \quad ح'_{ص} = \frac{ح_{ص}}{ل_{٢}}$$

(ليس شرطا أن $ل_{١} = ل_{٢}$)

مثال (٣) :

الجدول التالى يبين تكلفه العمالة (بالألف دولار) س،فى عدد ثمانى مصانع للملابس الجاهزة ، وقيمه الانتاج الشهرى (بالألف دولار) ص .

س	٥٠	٥٤	٦٠	٥٢	٦٤	٨٤	٧٤	٦٨
ص	٦٨	٧٦	٧٨	٧٢	٨٤	٩٦	٨٦	٨٤

والمطلوب:

حساب معامل بيرسون للارتباط الخطى باستخدام طريقه الفروق المختصرة .

الحــل:

س	ص	$ح_{س}$	$ح_{ص}$	$ح'_{س}$	$ح'_{ص}$	$ح'_{س} ح'_{ص}$	$ح'^{٢}_{س}$	$ح'^{٢}_{ص}$
٥٠	٦٨	-١٤	-١٦	-٧	-٨	٥٦	٤٩	٦٤
٥٤	٧٦	-١٠	-٨	-٥	-٤	٢٠	٢٥	١٦
٦٠	٧٨	-٤	-٦	-٢	-٣	٦	٤	٩
٥٢	٧٢	-١٢	-١٢	-٦	-٦	٣٦	٣٦	٣٦
[٦٤]	[٨٤]	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر
٨٤	٩٦	+٢٠	+١٢	١٠	٦	٦٠	١٠٠	٣٦
٧٤	٨٨	+١٠	+٤	٥	٢	١٠	٢٥	٤
٦٨	٨٤	+٤	صفر	٢	صفر	صفر	٤	صفر
$أ_{١} = ٦٤$	$أ_{٢} = ٤$			-٣ $ل_{١} = ٢$	-١٣ $ل_{٢} = ٢$	١٨٨	٢٤٣	١٦٥

حيث ن = ٨ وعليه فإنه (بتطبيق المعادله (٥))

$$ر = \frac{\frac{١٨٨}{٨} - \frac{-٣}{٨} \times \frac{-١٣}{٨}}{\sqrt{\frac{٢٤٣}{٨} - \left(\frac{-٣}{٨}\right)^{٢}} \sqrt{\frac{١٦٥}{٨} - \left(\frac{-١٣}{٨}\right)^{٢}}}$$

$$= \frac{٢٣,٥ - ٤,٨٧٥}{\sqrt{٣٠,٣٧٥ - ٠,١٤١} \sqrt{٢٠,٦٢٥ - ٢,٦٤١}}$$

$$= \frac{١٨,٦٢٥}{\sqrt{٣٠,٢٣٤} \times \sqrt{١٧,٩٨٤}}$$

$$= \frac{١٨,٦٢٥}{٥,٤٩٩ \times ٢,٢٤١}$$

$$= \frac{١٨,٦٢٥}{٢٣,٣٣٢}$$

= ٠,٨ (إرتباط قوى طردى)

ثانيا : معامل بيرسون للإرتباط لبيان كمية مبوبه (جداول تكرارية)

إذا أردنا حساب معامل الإرتباط لمتغيرين س ، ص وكانت أزواج المشاهدات كبيراً نسبيا ، فمثلا أذا جمعنا بيانات عن الإنتا ج (س) ، والإجر (ص) عن مائه أو مائتين عامل فى أحد المصانع ، ففى هذه الحاله يكون من الصعب وضع هذه البيانات بدون تبويب (مفرده) واستخدام المعادلات السابقه عند حساب العلاقة الإرتباطية بين الإنتاج والأجر، لكن فى مثل هذه الحالات علينا تبويب كل من المتغيرين (س) ،(ص) لكن يجب تبويبهم فى جدول تكرارى مزدوج (*) فإذا تبين لنا أن العلاقة خطية بين س ، ص فلا تختلف المعادلات المستخدمة

(*) انظر الجداول التكراريه المزدوجه بالفصل الثالث .

عنه عند حساب معامل الإرتباط الخطى لبيانات مفرده ، مع مراعاة ما يلى :

١ - أن (س) تمثل فى حالة البيانات المبوبة مراكز فئات المتغير (س) كما أن فئات المتغير (س) وما يناظرها من تكرارات ($\text{ك}_{\text{س}}$) تشكل وحدها جدول توزيع تكرارى يطلق عليه (جدول التوزيع الهامشى لقيم س) .

٢ - أن (ص) تمثل فى هذه الحاله مراكز فئات المتغير (ص) ، كما أن فئات المتغير (ص) وما يناظرها من تكرارات ($\text{ك}_{\text{ص}}$) تشكل أيضا وحدها جدول توزيع تكرارى يطلق عليه (جدول التوزيع الهامشى لقيم ص) .

٣ - بناء على ما سبق وعند حساب معامل الإرتباط الخطى للبيانات المبوبه ، فيجب علينا تعديل المعادلات السابقه فى حاله البيانات المفرده بحيث تتيح إدخال التكرارات لجدول التوزيع المزدوج فى الإعتبار وستكون على النحو التالى :

أولا : بإستخدام القيم الأصليه مباشرة :

$$\text{ر} = \frac{\dfrac{\text{مجـ س ص ك}_{\text{س ص}}}{\text{مجـ ك}} - \left(\dfrac{\text{مجـ س ك}_{\text{س}}}{\text{مجـ ك}_{\text{س}}}\right)\left(\dfrac{\text{مجـ ص ك}_{\text{ص}}}{\text{مجـ ك}_{\text{ص}}}\right)}{\sqrt{\dfrac{\text{مجـ س}^{2}\text{ك}_{\text{س}}}{\text{مجـ ك}_{\text{س}}} - \left(\dfrac{\text{مجـ س ك}_{\text{س}}}{\text{مجـ ك}_{\text{س}}}\right)^{2}} \times \sqrt{\dfrac{\text{مجـ ص}^{2}\text{ك}_{\text{ص}}}{\text{مجـ ك}_{\text{ص}}} - \left(\dfrac{\text{مجـ ص ك}_{\text{ص}}}{\text{مجـ ك}_{\text{ص}}}\right)^{2}}} \quad \cdots\cdots (٦)$$

حيث أن :

س ، $\text{ك}_{\text{س}}$ ، ص ، $\text{ك}_{\text{ص}}$ تشير إلى مراكز فئات وتكرارات س ، ص على الترتيب .

، $\text{ك}_{\text{س ص}}$ تشير إلى التكرارات المشتركة .

، $\text{مجـ ك}_{\text{س}} = \text{مجـ ك}_{\text{ص}} = \text{مجـ ك}$

يفضل إستخدامها إذا كانت س ، ص ذات قيم بسيطة وقيم تكراراتها المناظرة بسيطة أيضاً.

ثانيا : باستخدام الإنحرافات عن وسط فرضى :

$$\text{ر} = \frac{\dfrac{\text{مجـ}\, \text{ح}_{\text{س}}\, \text{ح}_{\text{ص}}\, \text{ك}_{\text{س ص}}}{\text{مجـ ك}} - \left(\dfrac{\text{مجـ}\, \text{ح}_{\text{س}}\, \text{ك}_{\text{س}}}{\text{مجـ}\, \text{ك}_{\text{س}}}\right)\left(\dfrac{\text{مجـ}\, \text{ح}_{\text{ص}}\, \text{ك}_{\text{ص}}}{\text{مجـ}\, \text{ك}_{\text{ص}}}\right)}{\sqrt{\left[\dfrac{\text{مجـ}\, \text{ح}^{2}_{\text{س}}\, \text{ك}_{\text{س}}}{\text{مجـ}\, \text{ك}_{\text{س}}} - \left(\dfrac{\text{مجـ}\, \text{ح}_{\text{س}}\, \text{ك}_{\text{س}}}{\text{مجـ}\, \text{ك}_{\text{س}}}\right)^{2}\right] \times \left[\dfrac{\text{مجـ}\, \text{ح}^{2}_{\text{ص}}\, \text{ك}_{\text{ص}}}{\text{مجـ}\, \text{ك}_{\text{ص}}} - \left(\dfrac{\text{مجـ}\, \text{ح}_{\text{ص}}\, \text{ك}_{\text{ص}}}{\text{مجـ}\, \text{ك}_{\text{ص}}}\right)^{2}\right]}} \quad \cdots\cdots\cdots (٧)$$

حيث أن :

$$\text{ح}_{\text{س}} = \text{س} - \text{أ}_{1} \text{ ، } \text{ح}_{\text{ص}} = \text{ص} - \text{أ}_{2}$$

تستخدم لتسهيل العمليات الحسابية إذا كانت قيم س، $\text{ك}_{\text{س}}$ ، ص ، $\text{ك}_{\text{ص}}$ كبيرة وكانت الفئات غير منتظمة أو منتظمة .

ثالثا : باستخدام الإنحرافات المختصرة :

$$\text{ر} = \frac{\dfrac{\text{مجـ}\, \text{ح}'_{\text{س}}\, \text{ح}'_{\text{ص}}\, \text{ك}_{\text{س ص}}}{\text{مجـ ك}} - \left(\dfrac{\text{مجـ}\, \text{ح}'_{\text{س}}\, \text{ك}_{\text{س}}}{\text{مجـ}\, \text{ك}_{\text{س}}}\right)\left(\dfrac{\text{مجـ}\, \text{ح}'_{\text{ص}}\, \text{ك}_{\text{ص}}}{\text{مجـ}\, \text{ك}_{\text{ص}}}\right)}{\sqrt{\left[\dfrac{\text{مجـ}\, \text{ح}'^{2}_{\text{س}}\, \text{ك}_{\text{س}}}{\text{مجـ}\, \text{ك}_{\text{س}}} - \left(\dfrac{\text{مجـ}\, \text{ح}'_{\text{س}}\, \text{ك}_{\text{س}}}{\text{مجـ}\, \text{ك}_{\text{س}}}\right)^{2}\right] \times \left[\dfrac{\text{مجـ}\, \text{ح}'^{2}_{\text{ص}}\, \text{ك}_{\text{ص}}}{\text{مجـ}\, \text{ك}_{\text{ص}}} - \left(\dfrac{\text{مجـ}\, \text{ح}'_{\text{ص}}\, \text{ك}_{\text{ص}}}{\text{مجـ}\, \text{ك}_{\text{ص}}}\right)^{2}\right]}} \quad ..(٨)$$

حيث أن :

$$\left(\text{ح}'_{\text{س}} = \frac{\text{ح}_{\text{س}}}{\text{ل}_{1}} \text{ ، } \text{ل}_{1} \neq \text{صفر ، } \text{ح}'_{\text{ص}} = \frac{\text{ح}_{\text{ص}}}{\text{ل}_{2}} \text{ ، } \text{ل}_{2} \neq \text{صفر}\right)$$

وهى الصيغه الشائعه الإستخدام ، لسهولة عملياتها الحسابية وتناسب جداول التوزيعات التكرارية المنتظمة .

وبالطبع كافئة الصور السابقه لحساب معامل بيرسون للارتباط تؤدى إلى نفس النتيجة .

مثال (٤) :

الجدول التالى يوضح عمر الطفل بالسنوات (س) ووزنه بالكيلو جرامات (ص) لعينه مكونه من ٢٠٠ طفل .

ص / س	١٠ـ	١٢ـ	١٤ـ	١٦ـ	١٨ـ ٢٠	المجموع
أقل من سنه	٤	٨	٥	٢		١٩
١ـ	٦	١١	١٣	٧	٣	٤٠
٢ـ	٥	١٣	٢٤	١٨	١١	٧١
٣ـ	٢	٩	١٦	١٤	٩	٥٠
٤ـ ٥		٢	٧	٨	٣	٢٠
المجموع	١٧	٤٣	٦٥	٤٩	٢٦	٢٠٠

والمطلوب:

حساب قوة العلاقة بين (س ، ص) بإستخدام معامل بيرسون للارتباط وفقا لما يلى :

أولا : طريقة القيم الأصليه مباشرة .

ثانيا : طريقة الانحرافات عن وسط فرضى .

ثالثا : طريقة الانحرافات المختصرة .

الحـل:

أولا : باستخدام القيم الأصليه مباشرة

$$\therefore \text{ر} = \frac{\frac{\text{مجـ س ص ك}_{\text{س ص}}}{\text{مجـ ك}} - \left(\frac{\text{مجـ س ك}_{\text{س}}}{\text{مجـ ك}_{\text{س}}}\right)\left(\frac{\text{مجـ ص ك}_{\text{ص}}}{\text{مجـ ك}_{\text{ص}}}\right)}{\sqrt{\frac{\text{مجـ س}^2\text{ ك}_{\text{س}}}{\text{مجـ ك}_{\text{س}}} - \left(\frac{\text{مجـ س ك}_{\text{س}}}{\text{مجـ ك}_{\text{س}}}\right)^2}\sqrt{\frac{\text{مجـ ص}^2\text{ ك}_{\text{ص}}}{\text{مجـ ك}_{\text{ص}}} - \left(\frac{\text{مجـ ص ك}_{\text{ص}}}{\text{مجـ ك}_{\text{ص}}}\right)^2}}$$

وسيتم الحصول على عناصر القانون السابق مما يلى :

(١) التوزيع الهامشى لـ(س)

فـس	ك س	س (مراكز الفئات)	س ك س	س^٢ ك س
أقل من سنه	١٩	٠,٥	٩,٥	٤,٧٥
١ ــ	٤٠	١,٥	٦٠	٩٠,٠٠
٢ ــ	٧١	٢,٥	١٧٧,٥	٤٤٣,٧٥
٣ ــ	٥٠	٣,٥	١٧٥,٠٠	٦١٢,٥٠
٤ ــ ٥	٢٠	٤,٥	٩٠	٤٠٥,٠٠
المجموع	٢٠٠		٥١٢	١٥٥٦

(٢) التوزيع الهامشى لـ(ص)

فـص	ك س	ص	ص ك س	ص^٢ ك س
١٠ ــ	١٧	١١	١٨٧	٢٠٥٧
١٢ ــ	٤٣	١٣	٥٥٩	٧٢٦٧
١٤ ــ	٦٥	١٥	٩٧٥	١٤٦٢٥
١٦ ــ	٤٩	١٧	٨٣٣	١٤١٦١
١٨ ــ ٢٠	٢٦	١٩	٤٩٤	٩٣٨٦
المجموع	٢٠٠		٣٠٤٨	٤٧٤٩٦

(٣) جدول التوزيع المشترك للمتغيرين (س، ص)

	مركز ص	١١	١٣	١٥	١٧	١٩	
مركز س	فئات ص / فئات س	١٠ـ	١٢ـ	١٤ـ	١٦ـ	١٨ـ ٢٠	مجـ س ص ك س ص
٠,٥	أقل من سنه	٤ (٢٢)	٨ (٥٢)	٥ (٣٧,٥)	٢ (١٧)	- (صفر)	١٢٨,٥
١,٥	١ـ	٦ (٩٩)	١١ (٢١٤,٥)	١٣ (٢٩٢,٥)	٧ (١٧٨,٥)	٣ (٨٥,٥)	٨٧٠
٢,٥	٢ـ	٥ (١٣٧,٥)	١٣ (٤٢٢,٥)	٢٤ (٩٠٠)	١٨ (٧٦٥)	١١ (٥٢٢,٥)	٢٧٤٧,٥
٣,٥	٣ـ	٢ (٧٧)	٩ (٤٠٩,٥)	١٦ (٨٤٠)	١٤ (٨٣٣)	٩ (٥٩٨,٥)	١٤٥٨
٤,٥	٤ ـ ٥	- (صفر)	٢ (١١٧)	٧ (٤٧٢,٥)	٨ (٦١٢)	٣ (٢٥٦,٥)	١٤٥٨
مجـ س ص ك س ص		٣٣٥,٥	١٢١٥,٥	٢٥٤٢,٥	٢٤٠٥,٥	١٤٦٣	٧٩٦٢

حصلنا على مجـ س ص ك س ص كما يلى :

١ ـ حددنا مراكز فئات (س) بدلا من فئات (س)

٢ ـ حددنا مراكز فئات (ص) بدلا من فئات (ص)

٣ ـ نقوم بضرب مركز فئة (س) × التكرار المناظر الموجود بالخلية فى مركز فئة (س) × مركز فئة (ص) المناظر لهذا التكرار، فمثلاً تكرار الخلية (٤) الموجود فى الخانة الأولى من الصف الأول يضرب فى مركز الفئة الأولى لـ (س) أى فى العمود الأول (٠,٥) × مركز الفئة الأولى لـ (ص) فى الصف الأول أى ١١ أى بضرب = ٢ × ٠,٥ × ١١ = ٢٢ والبقية توضع فى مربع داخل الخلية الأولى أمام الفئة الأولى لـ (س) ونكرر ما سبق فى كافة خلايا الجدول كما سبق .

وبالتعويض فى المعادلة (٦) من بيانات الجداول السابقة نحصل على

$$ر = \frac{\frac{٧٩٦٢}{٢٠٠} - \left(\frac{٥١٢}{٢٠٠}\right)\left(\frac{٣٠٤٨}{٢٠٠}\right)}{\sqrt{\frac{١٥٥٦}{٢٠٠} - \left(\frac{٥١٢}{٢٠٠}\right)^{٢}} \times \sqrt{\frac{٤٧٤٩٦}{٢٠٠} - \left(\frac{٣٠٤٨}{٢٠٠}\right)^{٢}}}$$

$$= \frac{٣٩,٨١ - ٢,٥٦ \times ١٥,٢٤}{\sqrt{٧,٧٨ - ٦,٥٥} \times \sqrt{٢٣٧,٤٨ - ٢٣٢,٢٦}}$$

$$= \frac{٣٩,٨١ - ٣٩,٠١}{\sqrt{١,٢٣} \times \sqrt{٥,٢٢}}$$

$$= \frac{٠,٨٠}{\sqrt{٦,٤١}} = \frac{٠,٨٠}{\sqrt{٢,٥٤}} = ٠,٣١٥$$ (إرتباط طردى ضعيف)

ثانيا : طريقة الأنحرافات عن وسط فرضى

(١) التوزيع الهامشى لـ (س)

ف س	ك س	س	ح س = (س - أ١)	ح س ك س	ح² س ك س
أقل من سنه	١٩	٠,٥	ـ ٢	ـ ٣٨	٧٦
١ ـ	٤٠	١,٥	ـ ١	ـ ٤٠	٤٠
٢ ـ	٧١	٢,٥	صفر	صفر	صفر
٣ ـ	٥٠	٣,٥	+ ١	+ ٥٠	٥٠
٤ ـ ٥	٢٠	٤,٥	+ ٢	+ ٤٠	٨٠
المجموع	٢٠٠	أ١ = ٢,٥	صفر	١٢	٢٤٦

(٢) التوزيع الهامشى لـ(ص)

ف ص	ك ص	ص	ح ص	ح ص ك ص	ح² ص ك ص
١٠ـ	١٧	١١	ـ٤	ـ٦٨	٢٧٢
١٢ـ	٤٣	١٣	ـ٢	ـ٨٦	١٧٢
١٤ـ	٦٥	١٥	صفر	صفر	صفر
١٦ـ	٤٩	١٧	+٢	+٩٨	١٩٦
١٨ـ ٢٠	٢٦	١٩	+٤	+١٠٤	٤١٦
المجموع	٢٠٠	أ٢ = ١٥	صفر	٤٨	١٠٥٦

(٣) جدول التوزيع المشترك للمتغيرين (س ، ص)

	ح ص	ـ٤	ـ٢	صفر	+٢	+٤	
ح س	ف ص / ف س	١١	١٣	١٥	١٧	١٩	مجـ ح س ح ص ك س ص
ـ٢	أقل من سنه	٤ (٣٢)	٨ (٣٢)	٥ (صفر)	٢ (ـ٨)	- (صفر)	٥٦
ـ١	ـ١	٦ (٢٤)	١١ (٢٢)	١٣ (صفر)	٧ (ـ١٤)	٣ (ـ٢)	٢٠
صفر	ـ٢	٥ (صفر)	١٣ (صفر)	٢٤ (صفر)	١٨ (صفر)	١١ (صفر)	صفر
+١	ـ٣	٢ (ـ٨)	٩ (ـ٨)	١٦ (صفر)	١٤ (٢٨)	٩ (٣٦)	٣٨
+٢	٤ ـ ٥	- (صفر)	٢ (ـ٨)	٧ (صفر)	٨ (٣٢)	٣ (٢٤)	٤٨
	مجـ ح س ح ص ك س ص	٤٨	٢٨	صفر	٣٨	٤٨	١٦٢

الخلية الأولى فى الصف الأول فى الجدول = ـ ٢ × ٤ × ٤ ـ ٤ = ٣٢

الخليه الثانيه فى الصف الأول فى الجدول = ـ ٢ × ٨ × ـ ٢ = ٣٢

وهكذا ......

وبالتعويض فى المعادلة رقم (٧) من بيانات الجداول السابقه

$$ر = \frac{\frac{١٦٢}{٢٠٠} - \left(\frac{١٢}{٢٠٠}\right)\left(\frac{٤٨}{٢٠٠}\right)}{\sqrt{\frac{٢٤٦}{٢٠٠} - \left(\frac{١٢}{٢٠٠}\right)^{٢}} \times \sqrt{\frac{١٠٥٦}{٢٠٠} - \left(\frac{٤٨}{٢٠٠}\right)^{٢}}}$$

= ٠,٣١٤ (ارتباط طردى ضعيف)

ثالثا : طريقة الإنحرافات المختصرة :

التوزيع الهامشى لـ (س)

$ف_{س}$	$ك_{س}$	س	$خ_{س}$	$ح'_{س}$	$ح'_{س} ك_{س}$	$ح'^{٢}_{س} ك_{س}$
أقل من سنه	١٩	٠,٥	٢ـ	١ـ	١٩ـ	١٩
١ـ	٤٠	١,٥	١ـ	٠,٥ـ	٢٠ـ	١٠
٢ـ	٧١	٢,٥	صفر	صفر	صفر	صفر
٣ـ	٥٠	٣,٥	١+	٠,٥+	٢٥+	١٢,٥
٤ـ٥	٢٠	٤,٥	٢+	١+	٢٠+	٢٠
المجموع	٢٠٠	$أ_{١}$ = ٢,٥	$ل_{١}$ = ٢	صفر	٦	٦١,٥

التوزيع الهامشى لـ(ص)

فـ ص	ك ص	ص	ح ص	ح ص	ح ص ك ص	ح² ص ك ص
١٠ـ	١٧	١١	٤ـ	٢ـ	٣٤ـ	٦٨
١٢ـ	٤٣	١٣	٢ـ	١ـ	٤٣ـ	٤٣
١٤ـ	٦٥	١٥	صفر	صفر	صفر	صفر
١٦ـ	٤٩	١٧	٢+	١+	٤٩	٤٩
١٨ـ ٢٠	٢٦	١٩	٤+	٢+	٥٢	١٠٤
المجموع	٢٠٠	أ٢ = ١٥	ل٢ = ٢	صفر	٢٤	٢٦٤

جدول التوزيع المشترك للمتغيرين (س ، ص)

	ح/ص	٢ـ	١ـ	صفر	١+	٢+	
ح/س	فـ ص / فـ س	١٠ـ	١٢ـ	١٤ـ	١٦ـ	١٨ـ ٢٠	مجـ ح/ص ح/س ك ص س
١ـ	أقل من سنة	٤ [٨]	٨ [٨]	٥ [صفر]	٢ [٢ـ]	- [صفر]	١٤
٠,٥ـ	١ـ	٦ [٦]	١١ [٥,٥]	١٣ [صفر]	٧ [٣,٥ـ]	٣ [٣ـ]	٥
صفر	٢ـ	٥ [صفر]	١٣ [صفر]	٢٤ [صفر]	١٨ [صفر]	١١ [صفر]	صفر
٠,٥+	٣ـ	٢ [٢ـ]	٩ [٤,٥ـ]	١٦ [صفر]	١٤ [٧]	٩ [٩]	٩,٥
١	٤ـ ٥	- [صفر]	٢ [٢ـ]	٧ [صفر]	٨ [٨]	٣ [٦]	١٢
	مجـ ح/ص ح/س ك ص س	١٢	٧	صفر	٩,٥	١٢	٤٠,٥

وبالتعويض فى المعادلة رقم (٨) من بيانات الجداول السابقه

$$\text{ر} = \frac{\frac{٤٠,٥}{٢٠٠} - \left(\frac{٦}{٢٠٠}\right)\left(\frac{٢٤}{٢٠٠}\right)}{\sqrt{\frac{٦١,٥}{٢٠٠} - \left(\frac{٦}{٢٠٠}\right)^{٢}} \times \sqrt{\frac{٢٤٦}{٢٠٠} - \left(\frac{٢٤}{٢٠٠}\right)^{٢}}}$$

= ٠,٣١٤ (نفس الجواب فى الطريقة السابقة)

ملاحظات على معامل الارتباط الخطى البسيط :

١ ـ يقيس معامل الإرتباط الخطى البسيط قوة العلاقه الخطية بين المتغيرين س، ص، ونعنى بذلك درجة إنتشار أو تركز إحداثيات أزواج القيم المتناظرة لكل من س ، ص حول خط الإنحدار فكلما زاد قربها من خط الانحدار زادت قوة العلاقة (الارتباط) والعكس صحيح .

٢ ـ إشارة معامل الارتباط تحدد إتجاة العلاقة بين المتغيرين س ، ص فاذا كانت (+) تكون العلاقة طردية ، لكن إذا كانت (–) تكون العلاقة بينهما عكسية، وتتوقف الاشارة إليها على إشارة التغاير فى س ، ص أى (البسط) لمعامل الارتباط ، فتكون إشارة معامل الارتباط موجبه حين يكون تغاير س ، ص فى إتجاه واحد ، وتكون إشاره معامل الإرتباط سالبه حين يكون تغاير س ، ص فى إتجاهين متضادين، ذلك لأن مقام معامل الإرتباط دائماً موجب لأنه عبارة عن ($ع_{\text{س}} \times ع_{\text{ص}}$) وكلاهما مقدار موجب .

٣ ـ إستقلال معامل الارتباط عن وحدات قياس المتغيرين س ، ص ونقطه الأصل لكل منهما ، للسبب السابق وجدنا أن قيمه (ر) لا تختلف سواء حسبت من بيانات أصلية أو باستخدام أسلوب الوسط الفرضى أو أسلوب الانحرافات المختصرة لظاهرتين ثابتتين كما لا تختلف قيمة (ر) أيا كان التعديل الذى ندخله على مفردات نفس الظاهرتين.

ثالثاً: معامل سبيرمان لإرتباط الرتب (للبيانات الوصفية أو الكمية الترتيبية غير المبوبة):

Spearman,s Rank Spearman Corre lation Coeffcient.

مقدمـة :

سبق أن أوضحنا أن عناصر الظواهر الاحصائيه قد تكون ذات قيم كميه أى ذات قياسات كميه (quantitive) أو قد تكون ذات قيم كميه أو وصفيه ترتيبيه (ordinal) ، كما هو الحال عند ترتيب الطلاب حسب درجات نجاحهم (كمية ترتيبيه) أو ترتيبهم على اساس تقديرات نجاحهم (وصفيه ترتيبيه) أو عندما نريد قياس العلاقة بين ظاهرتين ثم تسجيلهما على إساس الرتب وفق معيار أو اكثر محدد مقدما ، مثل مستوى النشاط الرياضى (س) للطالب فى مجموعة محددة ، ومستوى نشاطه الفنى (ص) فى نفس المجموعة،ومن ثم يمكن ترتيب عينه الطلاب المحددة فى كل من الإختبارين س ، ص . اما تصاعديا وإما تنازليا على حسب الأحوال .

ويعرف معامل سبيرمان للإرتباط بين متغيرين كل منهما مقاس رتبيا (كمياً أو وصفياً) فى عينة عددها (ن)، هنا يمكن إعطاء قيم (س)، وكذلك قيم (ص) قيماً عبارة عن الاعداد الطبيعية (١ ، ٢ ، ٣ ،...... ، ن) مرتبة ترتيباً خاصاً ثم إستخدام فروق الرتب بين س ، ص لإيجاد معامل إرتباط الرتب لسبيرمان والذى استخدمه فى إبحاثه الخاصة بعلم النفس، ويعتمد هذا المعامل على ترتيب المتغيرين ترتيباً تنازلياً أو تصاعدياً، مع مراعاة أن يكون هذا الترتيب فى اتجاه واحد وتكون معادلة حساب هذا المعامل على الصورة:

$$ر = ١ - \frac{٦ \text{ مجـ } ف^{٢}}{ن (ن^{٢} - ١)} \quad ....(٩)$$

حيث تشير :

$ف^{٢}$ إلى مربع الفروق بين زوجين متناظرين من المتغيرين س ، ص

ن تشير إلى عدد مفردات أزواج عينة الدراسة.

وتستخدم الصيغة السابقة إذا لم يصادف الباحث تشابها أو تكرارا في رتب بعض المفردات في المتغير الواحد سواء أكان المتغير س أو المتغير ص .

إما إذا كان هناك رتباً متشابهة أو متكررة في أي من رتب المتغيرين س، ص فالأمر هنا يختلف لأنه من المعروف أنه كلما زادت نسبة الرتب المتشابهة أو المتكررة كلما قلت دقة معامل إرتباط سبيرمان وفقاً للصيغة السابقة (٩). وعليه فإنه.

١ ـ إذا رأى الباحث الاحصائي أن نسب العناصر المتشابهة أو المتكررة في كل متغير بسيط بحيث يمكن تجاهلها ومن ثم تجاهل تأثيرها على دقة قيمة معامل الإرتباط فإنه في هذه الحالة يمكنه حساب هذا المعامل باستخدام المعادلة (٩) السابقة.

٢ ـ لكن إذا رأى الباحث أن نسب العناصر أو المفردات المتشابهة (أو المتكررة) عاليه، فلا يمكنه تجاهل تأثيرها على دقة قيمة معامل الارتباط وهنا يمكن إستخدام المعادلة التالية لقياس معامل إرتباط الرتب لسيرمان:

$$ر = ١ - \frac{٦ \text{ مجـ } ف^٢}{ن (ن^٢ - ١)} - \frac{\frac{١}{٢} \text{ مجـ } (مـ^٣ - مـ)}{ن (ن^٢ - ١)} \quad .....(١٠)$$

حيث (مـ) تشير هنا إلى عدد العناصر المتشابهة (أو المكررة) أي عدد مرات تكرار كل مفردة مكرره في كل من س أو ص أو كلاهما .

مثـال (٥) :

إستخدام معامل سبيرمان لإرتباط الرتب في عينة مكونة من عشرة عمال، لايضاح العلاقة بين عمر العامل (س)، وأجره اليومي بالجنيه (ص) في أحد المصانع من الجدول التالي:

س	١٥	٢٥	٢٠	٢٧	٢٢	٢٦	٢٤	١٨	٣٠	١٧
ص	٥	١٢	١٥	١٠	١١	١٣	٢٠	١٥	٢٥	٤

الحـــل :

يمكن وضع كل من المتغيرين س ، ص فى صورة ترتيبيه تصاعديه كما يلى :

رقم مسلسل	س	ص	ترتيب (س)	ترتيب (ص)	الفرق بين (س ـ ص) (ف)	مربع الفروق د (ف) أى($ف^٢$)
١	١٥	٥	١	٢	ـ١	١
٢	٢٥	١٢	٧	٥	ـ٢	٤
٣	٢٠	١٥	٤	٨	ـ٤	١٦
٤	٢٧	١٠	٩	٣	+٦	٣٦
٥	٢٢	١١	٥	٤	+١	١
٦	٢٦	١٣	٨	٦	+٢	٤
٧	٢٤	٢٠	٦	٩	ـ٣	٩
٨	١٨	١٤	٣	٧	ـ٤	١٦
٩	٣٠	٢٥	١٠	١٠	صفر	صفر
١٠	١٧	٤	٢	١	+١	١
المجموع						٨٨

، ن = ١٠

وحيث أنه لم تتكرر أى مفردة من مفردات س أو ص فانه يمكن إستخدام الصيغة (٩) لقياس معامل الارتباط الرتبى .

$$\therefore ر = ١ - \frac{٦ \text{ مجـ } ف^٢}{ن (ن^٢ - ١)}$$

$$= ١ - \frac{٦ \times ٨٨}{١٠ (١٠٠ - ١)}$$

$$= 1 - \frac{٥٢٨}{٩٩٠}$$

= ١ ـ ٠,٥٣ = ٠,٤٧ (إرتباط طردى ضعيف بين س ، ص)

مثـال (٦):

فيما يلى التقديرات العامه لعينه مكونه من سته طلاب فى مادتى المحاسبه (س) والقانون (ص) .

س	ممتاز	جيد	مقبول	جيد جدا	ضعيف جدا	ضعيف
ص	مقبول	جيد جدا	جيد	ممتاز	ضعيف	ضعيف جدا

والمطلوب : قياس معامل سبيرمان للارتباط بين س ، ص

الحـل:

بترتيب س ، ص تنازلياً نحصل على الجدول التالى:

رقم الطالب	س	ص	ترتيب س	ترتيب ص	ف	ف^٢
١	ممتاز	مقبول	١	٤	٣ـ	٩
٢	جيد	جيد جدا	٣	٢	١+	١
٣	مقبول	جيد	٤	٣	١+	١
٤	جيد جدا	ممتاز	٢	١	١+	١
٥	ضعيف جدا	ضعيف	٦	٥	١+	١
٦	ضعيف	ضعيف جدا	٥	٦	١ـ	١
						١٤

حيث أنه لم تتكرر أى مفردة للعينة فى كل من س ، ص

$$\therefore ر = ١ - \frac{٦ \times ١٤}{٦ (٣٦ - ١)}$$

$$= ١ - \frac{٨٤}{٢١٠}$$

= ١ - ٠,٤ = ٠,٦ (إرتباط طردى متوسط)

مثـال (٧) :

فيما يلى بيان يمثل تقديرات عينة مكونه من (٢٠) طالباً باحدى سنوات كليه التجارة فى مادتى الإحصاء والإقتصاد، فحدد قوة العلاقة واتجاهها بين المادتين باستخدام معامل سبيرمان للإرتباط.

مسلسل	التقديرات فى الاحصاء (س)	التقديرات فى الاقتصاد (ص)	مسلسل	س	ص	مسلسل	س	ص
١	جيد جدا	جيد	٨	جيد	مقبول	١٥	جيد	مقبول
٢	ضعيف جدا	ضعيف جدا	٩	ممتاز	ممتاز	١٦	ممتاز	جيد جدا
٣	ضعيف	مقبول	١٠	ضعيف جدا	ضعيف	١٧	مقبول	مقبول
٤	جيد	جيد	١١	جيد	مقبول	١٨	جيد	جيد
٥	مقبول	مقبول	١٢	جيد جدا	مقبول	١٩	ضعيف جدا	ضعيف
٦	ممتاز	جيد جدا	١٣	ضعيف جدا	ضعيف	٢٠	جيد	مقبول
٧	مقبول	ضعيف	١٤	جيد	جيد			

بترتيب كل من س ، ص تصاعدياً كما فى الجدول التالى.

مسلسل	س	ص	ترتيب س	ترتيب ص	ف	$ف^2$
١	جيد جدا	جيد	١٦,٥	١٥,٥	١ +	١
٢	ضعيف جدا	ضعيف جدا	٢,٥	١	١,٥ +	٢,٢٥
٣	ضعيف	مقبول	٥	٩,٥	٤,٥ ـ	٢٠,٢٥
٤	جيد	جيد	١٢	١٥,٥	٣,٥ ـ	١٢,٢٥
٥	مقبول	مقبول	٧	٩,٥	٢,٥ ـ	٦,٢٥
٦	ممتاز	جيد جدا	١٩	١٨,٥	٠,٥ +	٠,٢٥
٧	مقبول	ضعيف	٧	٣,٥	٣,٥ +	١٢,٢٥
٨	جيد	مقبول	١٢	٩,٥	٢,٥ +	٦,٢٥
٩	ممتاز	ممتاز	١٩	٢٠	١ ـ	١
١٠	ضعيف جدا	ضعيف	٢,٥	٣,٥	١ ـ	١
١١	جيد	مقبول	١٢	٩,٥	٢,٥ +	٦,٢٥
١٢	جيد جدا	مقبول	١٦,٥	٩,٥	٧ +	٤٩
١٣	ضعيف جدا	ضعيف	٢,٥	٣,٥	١ ـ	١
١٤	جيد	جيد	١٢	١٥,٥	٣,٥ ـ	١٢,٢٥
١٥	جيد	مقبول	١٢	٩,٥	٢,٥ +	٦,٢٥
١٦	ممتاز	جيد جدا	١٩	١٨,٥	٠,٥ +	٠,٢٥
١٧	مقبول	مقبول	٧	٩,٥	٢,٥ ـ	٦,٢٥
١٨	جيد	جيد	١٢	١٥,٥	٣,٥ ـ	١٢,٢٥
١٩	ضعيف جدا	ضعيف	٢,٥	٣,٥	١ ـ	١
٢٠	جيد	مقبول	١٢	٩,٥	٢,٥ +	٦,٢٥
المجموع						١٦٣,٥

ملاحظات على ترتيب تقديرات (س) التى بها تكرار :

١ ـ متوسط ترتيب تقدير ضعيف جدا = $\frac{١ + ٢ + ٣ + ٤}{٤} = \frac{١٠}{٤}$

$= ٢,٥$

وهى تقديرات الطلاب ارقام (٢ ، ١٠ ، ١٣ ، ١٩)

٢ ـ متوسط ترتيب تقدير مقبول = $\frac{٦ + ٧ + ٨}{٣} = \frac{٢١}{٣} = ٧$

وهى تقديرات الطلاب أرقام (٥ ، ٧ ، ١٧).

٣ ـ متوسط ترتيب تقدير جيد = $\frac{٩ + ١٠ + ١١ + ١٢ + ١٣ + ١٤ + ١٥}{٧} = \frac{٨٤}{٧}$

$= ١٢$

٤ ـ متوسط ترتيب تقدير جيد جدا = $\frac{١٦ + ١٧}{٢} = \frac{٣٣}{٢} = ١٦,٥$

٥ ـ متوسط ترتيب تقدير ممتاز = $\frac{١٨ + ١٩ + ٢٠}{٣} = \frac{٥٧}{٣} = ١٩$

وباتخاذ نفس الأمر بالنسبه لترتيب (ص) سنجد

١ ـ متوسط تقدير ضعيف = $\frac{٢ + ٣ + ٤ + ٥}{٤} = \frac{١٤}{٤} = ٣,٥$

٢ ـ متوسط تقدير مقبول = $\frac{٦ + ٧ + ٨ + ٩ + ١٠ + ١١ + ١٢ + ١٣}{٨} = \frac{٧٦}{٨}$

$= ٩,٥$

٣ ـ متوسط تقدير جيد = $\frac{١٤ + ١٥ + ١٦ + ١٧}{٤} = \frac{٦٢}{٤} = ١٥,٥$

٤ ـ متوسط تقدير جيد جدا = $\frac{١٨ + ١٩}{٢} = \frac{٣٧}{٢} = ١٨,٥$

وحيث أن هناك تكرار فى مفردات كل من س ، ص وعليه فسنطبق المعادلة رقم (١٠) على الصورة التالية:

$$ر = ١ - \frac{٦ \text{ مجـ } ف^٢}{ن (ن^٢ - ١)} - \frac{\frac{١}{٢} \text{ مجـ } (مـ^٣ - مـ)}{ن (ن^٢ - ١)}$$

والجدول بالصورة السابقة لا يحقق كافة عناصر المعادلة السابقة حيث سنحتاج إلى حساب .

$$\frac{\frac{١}{٢} \text{ مجـ } (مـ^٣ - مـ)}{ن (ن^٢ - ١)}$$

وسنحسب مجـ (مـ^٣ ـ مـ) كما يلى :

التقدير المكرر : بالنسبة لـ (س) + بالنسبة لـ (ص) = المجموع

١ ـ تقدير ضعيف جدا : (٤^٣ ـ ٤) + (ــــ) = ٦٠

٢ ـ تقدير ضعيف : (ــــ + (٤^٣ ـ ٤) = ٦٠

٣ ـ تقدير مقبول : (٣^٣ ـ ٣) + (٨^٣ ـ ٨) = ٥٣١

٤ ـ تقدير جيد : (٧^٣ ـ ٧) + (٤^٣ ـ ٤) = ٣٩٦

٥ ـ تقدير جيد جداً : (٢^٣ ـ ٢) + (٢^٣ ـ ٢) = ١٢

٦ ـ تقدير ممتاز : (٣^٣ ـ ٣) ـ = ٦

∴ مجـ (مـ^٣ ـ مـ) = ١٠٦٥

وعليه فإن

$$ر = ١ - \frac{٦ \times ١٦٣,٥}{٢٠ (٢٠^٢ - ١)} - \frac{\frac{١}{٢} \times ١٠٦٥}{٢٠ (٢٠^٢ - ١)}$$

$$= 1 - \frac{981}{7980} - \frac{532.5}{7980}$$

$= 1 - 0.1229 - 0.0667$

$= 1 - 0.1896$

$= 0.8104$

∴ هناك علاقة قوية بين تقديرات الطلاب فى مادة الاحصاء وتقديراتهم فى مادة الإقتصاد وهى علاقة طردية.

إرتباط الصفات الغير قابلة للترتيب

هناك بعض الصفات الغير قابله للترتيب ، مثل الجنس ، التدخين ، والتطعيم ، والاصابه بمرض ما ، ولون الزهرة ، ورائحة الزهرة ولون العينين ، ودرجة التعلم .... الخ، فإن هناك مقاييس أخرى – خلاف معامل سبيرمان للإرتباط والذى يقتصر إستخدامه فى حاله الصفات الترتيبيه ـ لدراسة الإرتباط بين ظاهرتين من الصفات الغير ترتيبيه ستقتصر دراستنا على إحداها (*) ألا وهو :

معامل الإقتران ، Associaton Coefficient ،

ويقتصر إستخدامه عند إيجاد العلاقة بين صفتين غير ترتيبتين فى مجالات علمية كثيرة فى علوم كثيرة كالطب والزراعة، وعلم الإجتماع ... إلخ ، كما هو الحال عند دراسة مشكله التدخين فيكون هناك صفتين لمجتمع الدراسة (مدخن أو غير مدخن) ، ومشكلة التعليم والعمل فيكون هناك صفتان (متعلم ، وأمى ومشكلة العمل أو البطالة فيكون هناك صفتان (يعمل ، متعطل) ، ومشكلة الإصابة بمرض ما فيكون هناك صفتان (أصيب ، أو لم يصب) بهذا المرض، أو مشكلة التطعيم بمصل ما فيكون هناك صفتان (فعال أو غير فعال) .... وهكذا .

وعموما لدراسة مفهوم الإقتران بين صفتين أو متغيرين ما نفرض أن لكل

(*) هناك مقياس آخر وهو معامل التوافق .

من المتغيرين (س) ، (ص) صفتان، الصفة الأولى ($س_1$) والصفة الثانية ($س_2$) للمتغير س ، والصفة الأولى ($ص_1$) والصفة الثانيه ($ص_2$) للمتغير (ص) وتم جمع بيانات عن الصفات السابقة من عينه دراسيه (ن) فإنه يمكن عرض بيانات المتغيرين على الصورة السابقة فى جدول مزدوج يشتمل على أربع خلايا يطلق عليه ، جدول الإقتران ، مكون من صفين وعمودين ويأخذ الصورة التاليه :

جدول الاقتران لـ (س ، ص)

المتغير (ص) / المتغير (س)	تكرارات الصفة الأولى ($ص_1$)	تكرارات الصفة الثانيه ($ص_2$)	المجموع
تكرارات الصفه الأولى ($س_1$) تكرارات الصفه الثانيه ($س_2$)	$ت_{11}$ $ت_{12}$	$ت_{21}$ $ت_{22}$	$ت_{1.}$ $ت_{2.}$
المجموع	$ن_{.1}$	$ن_{.2}$	ن

حيث :

عناصر الصف الأول :

(١) $ت_{11}$ عباره عن التكرارات المشتركه فى الصفه الأولى ($س_1$) للمتغير (س) والصفة الأولى ($ص_1$) للمتغير (ص)

(٢) $ت_{21}$ عباره عن التكرارات فى الصفه الأولى ($س_1$) للمتغير (س) والصفة الثانيه ($ص_2$) للمتغير (ص) .

عناصر الصف الثاني :

(٣) $ت_{12}$ عباره عن التكرارات المشتركة فى الصفة الثانيه ($س_2$) للمتغير

(س) والصفة الأولى ($ص_1$) للمتغير (ص)

(٤) $ت_{22}$ عبارة عن التكرارات المشتركة فى الصفة الثانية ($س_2$) للمتغير س والصفة الثانية ($ص_2$) للمتغير (ص) وعليه فيتم قياس معامل الإقتران (*) وسنرمز له بالرمز ($م_{(ق)}$) بالعلاقة التالية:

$$م_{(ق)} = \frac{ت_{11} \times ت_{22} - ت_{12} \times ت_{21}}{ت_{11} \times ت_{22} + ت_{12} \times ت_{21}} \quad .... (11)$$

مثـال (٨) :

أوجد معامل الاقتران بين العمل والتعليم لعينه من الأفراد بلغ قوامها ٤٠٠ شخص ، وكانت البيانات التى تم جمعها عنهم كما يلى :

العمل (ص) / التعليم (س)	أمى	متعلم	المجموع
لا يعمل	٥٠	٢٠	٧٠
يعمل	٥٠	٢٨٠	٣٣٠
المجموع	١٠٠	٣٠٠	٤٠٠

الحـل :

$$\therefore م_{(ق)} = \frac{ت_{11} \times ت_{22} - ت_{12} \times ت_{21}}{ت_{11} \times ت_{22} + ت_{12} \times ت_{21}}$$

$$= \frac{٥٠ \times ٢٨٠ - ٥٠ \times ٢٠}{٥٠ \times ٢٨٠ + ٥٠ \times ٢٠}$$

$$= \frac{١٤٠٠٠ - ١٠٠٠}{١٤٠٠٠ + ١٠٠٠}$$

(*) وصل اليـه ييـل (yule)

$$= \frac{١٣٠٠٠}{١٥٠٠٠}$$

= ٠,٨٧ (أى يوجد إرتباط قوى بين التعليم والعمل)

مثـال (٩) :

الجدول التالى يلخص نتائج الدراسة التى قامت بها منظمة الصحة العالمية بالاسكندرية لمعرفة تأثير إستخدام عقار ما على رفع ضغط الدم لعدد ١٠٠٠ مريض مصابون بانخفاض ضغط الدم .

ضغط الدم (ص) / تناول العقار (س)	إرتفع	لم يرتفع	المجموع
إستخدم العقار	٥٥٠	١٧٠	٧٢٠
لم يستخدم العقار	٩٠	١٩٠	٢٨٠
المجموع	٦٤٠	٣٦٠	١٠٠٠

الحــل :

$$م_{(ق)} = \frac{١٧٠ \times ٩٠ - ١٩٠ \times ٥٥٠}{١٧٠ \times ٩٠ + ١٩٠ \times ٥٥٠}$$

$$= \frac{٨٩٢٠٠}{١١٩٨٠٠}$$

= ٠,٧٤ (هناك علاقة متوسطة بين إستخدام العقار وارتفاع ضغط الدم)

خامساً : العلاقة بيم معامل بيرسون للإرتباط (ر) وبين معاملات الانحـدار (أ ، م)يهـدف كل من الإنحـدار والإرتبـاط إلى التـعرف على العلاقة بين المتغيرين س ، ص ، فمن المتوقع وجود علاقة بينهما وحيث أن:

أولا : معامل انحدار ص / س :

$$\text{أ} = \frac{\dfrac{\text{مجـ س ص}}{\text{ن}} - \dfrac{\text{مجـ س}}{\text{ن}} \times \dfrac{\text{مجـ ص}}{\text{ن}}}{\dfrac{\text{مجـ س}^{2}}{\text{ن}} - \left(\dfrac{\text{مجـ س}}{\text{ن}}\right)^{2}}$$

$$= \frac{\dfrac{\text{مجـ س ص}}{\text{ن}} - \dfrac{\text{مجـ س}}{\text{ن}} \times \dfrac{\text{مجـ ص}}{\text{ن}}}{\sqrt{\dfrac{\text{مجـ س}^{2}}{\text{ن}} - \left(\dfrac{\text{مجـ س}}{\text{ن}}\right)^{2}} \times \sqrt{\dfrac{\text{مجـ ص}^{2}}{\text{ن}} - \left(\dfrac{\text{مجـ ص}}{\text{ن}}\right)^{2}}} \times \frac{\sqrt{\dfrac{\text{مجـ ص}^{2}}{\text{ن}} - \left(\dfrac{\text{مجـ ص}}{\text{ن}}\right)^{2}}}{\sqrt{\dfrac{\text{مجـ س}^{2}}{\text{ن}} - \left(\dfrac{\text{مجـ س}}{\text{ن}}\right)^{2}}}$$

$$\therefore \text{أ} = \text{ر} \times \frac{\text{ع}_{\text{ص}}}{\text{ع}_{\text{س}}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (١٢)$$

ثانياً : معامل انحدار س / ص :

$$\text{م} = \frac{\dfrac{\text{مجـ س ص}}{\text{ن}} - \dfrac{\text{مجـ س}}{\text{ن}} \times \dfrac{\text{مجـ ص}}{\text{ن}}}{\dfrac{\text{مجـ ص}^{2}}{\text{ن}} - \left(\dfrac{\text{مجـ ص}}{\text{ن}}\right)^{2}}$$

$$= \frac{\dfrac{\text{مجـ س ص}}{\text{ن}} - \dfrac{\text{مجـ س}}{\text{ن}} \times \dfrac{\text{مجـ ص}}{\text{ن}}}{\sqrt{\dfrac{\text{مجـ ص}^{2}}{\text{ن}} - \left(\dfrac{\text{مجـ ص}}{\text{ن}}\right)^{2}} \times \sqrt{\dfrac{\text{مجـ س}^{2}}{\text{ن}} - \left(\dfrac{\text{مجـ س}}{\text{ن}}\right)^{2}}} \times \frac{\sqrt{\dfrac{\text{مجـ س}^{2}}{\text{ن}} - \left(\dfrac{\text{مجـ س}}{\text{ن}}\right)^{2}}}{\sqrt{\dfrac{\text{مجـ ص}^{2}}{\text{ن}} - \left(\dfrac{\text{مجـ ص}}{\text{ن}}\right)^{2}}}$$

$$\therefore م = ر \times \frac{ع_{ص}}{ع_{س}} \quad \text{.................} \quad (١٣)$$

من العلاقتين (١٢) ، (١٣) السابقتين نستنتج وجود علاقة متبادلة بين معامل الإرتباط (ر) ومعاملات الانحدار (أ ، م) ويمكن إيجاد أحدهما بمعرفة الآخر حيث أن :

$$\sqrt{\left(ر \times \frac{ع_{ص}}{ع_{س}}\right) \times \left(ر \times \frac{ع_{س}}{ع_{ص}}\right)}$$

$$= \sqrt{ر^{٢}}$$

$$= ر \quad \text{(معامل الإرتباط)}$$

مما تقدم نجد أن :

معامل الارتباط عباره عن الجذر التربيعي لحاصل ضرب معامل انحدار ص/س أى (أ) فى معامل انحدار س / ص أى (م) أى أن :

$$ر = \sqrt{أ \times م} \quad \text{..............} \quad (١٤)$$

وكذلك :

$$أ = ر \times \frac{ع_{س}}{ع_{ص}} \quad \text{.............} \quad (١٥)$$

ومنها نستنتج :

$$ر = أ \times \frac{ع_{ص}}{ع_{س}}$$

وأيضا :

$$م = ر \times \frac{ع_{ص}}{ع_{س}} \quad \text{.............} \quad (١٦)$$

ومنها نستنتج :

$$ر = م \times \frac{ع_{ص}}{ع_{س}}$$

مثال (١٠):

من المثالين رقم (١) ، والمثال رقم (٤) فى هذا الفصل إستنتج :

أولا ـ معامل الارتباط بمعلومية كل من أ ، م .

ثانياً ـ معامل الارتباط بمعلومية (أ) فقط .

ثالثاً ـ معامل الارتباط بمعلومية (م) فقط .

الحـل :

أولا : من حل المثال رقم (١) السابق وجدنا أن أ = ٠,٦٨

ومن حل المثال رقم (٤) السابق وجدنا أن م = ١,١٢٩

ومن العلاقه رقم (١٤) السابقه

$$\because ر = \sqrt{أ \times م}$$

$$\therefore ر = \sqrt{٠,٦٨ \times ١,١٢٩}$$

$$= \sqrt{٠,٧٦٨}$$

= ٠,٨٨ (أى أن العلاقة بين س ، ص متوسطه)

(ب) من حل المثال رقم (١) السابق وجدنا أن أ = ٠,٦٨

كما أن

$$ع_{س} = \sqrt{\frac{مجـ س^{٢}}{ن} - \left(\frac{مجـ س}{ن}\right)^{٢}}$$

$$= \sqrt{\frac{٧٩٦}{٦} - \left(\frac{٦٢}{٦}\right)^{٢}}$$

$$= \sqrt{\text{١٣٤,٦٦٧} - \text{١٠٦,٧٧٤}}$$

$$= \sqrt{\text{٢٥,٩٥٧}}$$

$$= \text{٥,٠٩٥}$$

ومن المثال رقم (٤) نجد أن :

$$\text{ع}_{\text{ص}} = \sqrt{\frac{\text{مجـ ص}^{٢}}{\text{ن}} - \left(\frac{\text{مجـ ص}}{\text{ن}}\right)^{٢}}$$

$$= \sqrt{\frac{\text{٤١٦}}{\text{٦}} - \left(\frac{\text{٤٤}}{\text{٦}}\right)^{٢}}$$

$$= \sqrt{\text{٦٩,٣٣٣} - \text{٥٣,٧٧٥}}$$

$$= \sqrt{\text{١٥,٥٥٨}}$$

$$= \text{٣,٩٤٤}$$

ومن العلاقة رقم (١٥) نجد أن

$$\therefore \text{ر} = \text{أ} \times \frac{\text{ع}_{\text{س}}}{\text{ع}_{\text{ص}}}$$ وبالتعويض مما سبق

$$\therefore \text{ر} = \text{٠,٦٨} \times \frac{\text{٥,٠٩٥}}{\text{٣,٩٤٤}}$$

$$= \text{٠,٦٨} \times \text{١,٢٩٢}$$

$= \text{٠,٨٨}$ (وهى نفس النتيجة فى أولا السابقه)

(حـ) من حل المثـال رقم (٤) السـابق وجـدنا أن م = ١,١٢٩ ومن العلاقة رقم (١٦) نجد أن :

$$\text{ر} = \text{م} \times \frac{\text{ع}_{\text{ص}}}{\text{ع}_{\text{س}}}$$ وبالتعويض مما سبق

$$\therefore ر = ١,١٢٩ \times \frac{٣,٩٤٤}{٥,٠٩٥}$$

$$= ١,١٢٩ \times ٠,٧٧٤$$

= ٠,٨٨ (وهى نفس النتيجة فى أولاً وثانيا السابقه)

تمـــاريــن (٧)

(١) أوجد معادله خط إنحدار ص/س ، ومعادله إنحدار س/ص من بيانات الجدول التالى باستخدام طريقة المربعات الصغرى (باستخدام اكثر من طريقه)

س (عدد ساعات العمل)	١	٢	٤	٥	٦	٧
ص (عدد الوحدات المنتجه)	٧	١٤	٢٤	٣٣	٣٩	٤١

ومنها إستنتج :

أولا : ص عندما س = ١٢ من معادله ص / س

ثانيا : س عندما ص = ٥٦ من معادلة س / ص

(٢) أوجد معادله خط إنحدار ص / س للبيانات التاليه :

س	٤٠	٥٠	٨٠	٩٠	٧٠	٧٠	٦٠	٦٠	٥٠	٧٠
ص	٩٠	١٠٠	١٢٠	١٢٠	٩٠	١٠٠	٨٠	١٠٠	٩٠	٨٠

(٣) بفرض أن س : قيمة ما أنفق فى أحدى السنوات (بالألف جنيه) على حمله إعلانيه للدعوة إلى تنظيم حجم الأسرة فى إحدى المحافظات .

، ص : عدد المترددات على مراكز تنظيم الأسرة (بالمئات) فى تلك المحافظة .

ويفرض أن العلاقة بين س ، ص علاقة خطية كما أن :

مجـ س = ٥٥ ، مجـ ص = ١٦٠

، مجـ س^2 = ٣٨٥ ، مجـ ص^2 = ٢٧٢٠

، مجـ س ص = ١٠٤٥ ، ن = ١٠

فأوجد :

أولا : معادلة خط إنحدار ص / س

ثانيا : من المعادله السابقه أوجد العدد المتوقع لمن سيترددون على مراكز تنظيم الأسرة بالمحافظة المذكورة فى نفس السنة لو أن ما أتفق على الحملة الاعلانيه = ٣٠٠ ألف جنيه

(٤) البيانات التاليه ثم جمعها خلال ثمانى سنوات متتاليه من احدى الوحدات الانتاجيه .

الانتاج (بالاف وحده) س	١٠	١٥	٤٥	٣٥	٤٠	٥٠	٣٠	٤٥
التكلفه (بالاف جنيه) ص	٣٥	٤٠	٧٠	٤٥	٦٠	٧٥	٥٠	٦٥

والمطلوب :

(أ) باستخدام طريقة المربعات الصغرى أوجد معادله خط إنحدار ص/س بفرض أنه شبه مستقيم .

(ب) قدر التكلفه المتوقعه عند مستوى انتاج ١٠٠ ألف وحدة .

(٥) فيما يلى جدول يوضح الدخل (س) والأنفاق (ص) بالألف جنيه لعدد (٧ أسر) - باستخدام طريقه المربعات الصغرى بافتراض أن أنه خط مستقيم .

س	٨	١٠	١٢	١٢	١٣	١٥	٢٠
ص	٨	٩	١٢	١٠	١٠	١٣	١٩

والمطلوب : أولا : تحديد معادله خط انحدار ص/س

ثانيا : قدر الانفاق عندما يكون الدخل ٣٥ ألف جنيه سنويا .

ثالثا : تحديد معادله خط إنحدار س/ص .

(٦) كانت قيمة المبيعات لاحدى شركات الحديد والصلب عن الفترة ٨٦ - ١٩٩٥ بملايين الجنيهات .

س	١٩٨٦	١٩٨٧	١٩٨٨	١٩٨٩	١٩٩٠	١٩٩١	١٩٩٢	١٩٩٣	١٩٩٤	١٩٩٥
ص	٦٥	٧٠	٨٠	٩٠	١٠٥	١١٥	٨٠	١٢٠	١٠٠	١٣٠

والمطلوب :

تحديد معادله خط إنحدار قيمه المبيعات على الزمن ومنه قدر المبيعات خلال عام ١٩٩٨ .

(٧) فيما يلى بيان إجمالى المنفق على ميزانيه الأسرة (س) والانفاق على المسكن (ص) فى عينة تضم ١٠ أسر باحدى المدن:

س (بالألف جنيه)	٢٠	٢٥	٣٠	٣٥	٤٠	٤٥	٥٠	٥٥	٦٠	٦٥
ص (بالألف جنيه)	١٤	١٥	١٧	١٦	١٨	٢٠	٢١	٢٥	٢٤	٣٠

والمطلوب :

أولا : معامل بيرسون للإرتباط الخطى البسيط بين س،ص (بأكثر من طريقة)
ثانيا : معامل سبيرمان للارتباط بين س ، ص .

(٨) أوجد معامل بيرسون للارتباط الخطى اذا علمت أن :

مجـ س = ٦٧٠   مجـ س^{2} = ٤٤٩٦٠

مجـ ص = ٢٨٠   مجـ ص^{2} = ٧٨٨٨

مجـ س ص = ١٨٨٠٢ ، ن = ١٠

(٩) فيما يلى جدول يوضح نسبه البطاله (س) ، وكميه الانتاج بملايين الجنيهات (ص) باحدى المحافظات خلال عشرة سنوات متتاليه .

س	١٧٪	١٤,٢٪	١١,٧٪	١٠,٣٪	١١,٣٪	١٢,٥٪	٩,٧٪	١٠,٨٪	١٠,٤٪	١٦,١٪
ص	٧٠٣	٧٢٠	٧٦٧	٨٠١	٧٧٣	٦٥٣	٧٠٩	٧٢٤	٧٢٠	٧٠٣

أوجد :

(أ) معامل بيرسون للارتباط بإستخدام الوسطين الحسابين لكل من س،ص

(ب) معامل سبيرمان للإرتباط .

(١٠) قامت إحدى الشركات بسحب عينه عشوائيه من (٣٠ عاملا) وذلك لمعرفة إتجاه وقوة العلاقة بين الأجر اليومى للعامل بالجنيه (س) ، ومدة خدمته (ص) بالسنوات (بأكثر من طريقة) والجدول التالى يوضح البيانات المسجله عن هذه العينة بعد وضعها فى صورة جدول توزيع تكرارى مزدوج

ص \ س	٣ـ	٥ـ	٧ ـ ٩	المجموع
٢ـ	٢	ـ	١	٣
٤ـ	٤	٣	ـ	٧
٦ـ	ـ	٥	٦	١١
٨ ـ ١٠	ـ	٨	١	٩
المجموع	٦	١٦	٨	٣٠

(١١) فيما يلى جدول تكرارى مزدوج حيث (س) تمثل عمر الرجل المتزوج (س) ، (ص) تمثل ما عنده من الأولاد بين السن ٧ ـ ١٨ سنه .

والمطلوب : حساب معامل الارتباط لبيرسون بين س ، ص .

(١٢) إحسب معامل الارتباط لبيرسون بين العمر (س) لمجموعة من الأطفال ، وبين أوزانهم (ص) باستخدام الجدول التكرارى المزدوج التالى (بأكثر من طريقه) :

ص \ س	٥ـ	٦ـ	٧ـ	٨ـ	٩ ـ ١٠	المجموع
١٨ـ	ـ	٢	٥	٢	ـ	٩
٢٠ـ	٣	٣	٦	٤	١	١٧
٢٢ـ	٦	٧	١٦	٩	٥	٤٣
٢٤ـ	١	٥	٨	٥	٢	٢١
٢٦ـ ٢٨	ـ	٣	٥	٢	ـ	١٠
المجموع	١٠	٢٠	٤٠	٢٢	٨	١٠٠

(١٣) إحسب معامل الارتباط من التمرين رقم (١) بإستخدام العلاقه بين معامل الارتباط ومعاملات الانحدار.

(١٤) إحسب معامل الانحدار الخطى بين س ، ص من المعلومات المتاحة بالتمرين رقم (٨).

(١٥) إحسب الخطأ المعيارى من التمرين رقم (٢) .

(١٦) إحسب معامل الاقتران من البيانات التاليه :

الإصابه بسرطان الرئه / التدخين	مدخن	غير مدخن	المجموع
أصيب	٤٠٠	٢٥٠	٦٥٠
لم يصب	١٠٠	٥٠	١٥٠
المجموع	٥٠٠	٣٠٠	٨٠٠

الفصل الثامن

الأرقام القياسية

INDEX NUMBERS

مقدمة :

يحدث أن تكون هناك ظاهرة أو عدة ظواهر مختلفة فيما بينها ولكن مرتبطة بشكل أو بأخر لتكون مجموعة متجانسة ، ونرغب هنا أن نقيس التغير أو التغيرات التى تطرأ عليها سواء تم قياس ذلك التغير بالنسبة للزمن أم بغيره وليكن من مكان لآخر، هنا يتبادر إلى الذهن لأول وهلة أن القيم المطلقة للتغير أو للإختلاف فى قيم الظاهرة أو المتغير خلال فترتين زمنيتين أو أكثر، تعتبر هى المقياس الوحيد والأفضل لقياس هذا التغير، لكننا نود أن نشير هنا إلى خلاف ما سبق، ذلك أن التغير المطلق لا يعتبر مقياساً علمياً دقيقاً فى مثل هذه الحالات، بل يستحيل إستخدامه إذا ما إختلفت توعية وحدات القياس (التمييز) بين ظاهرتين أو أكثر فمثلاً :

١ - إذا إرتفع سعر الوحدة من سلعة (أ) من ٢٠ جنيهاً إلى ٢٥ جنيهاً خلال فترة زمنية محددة ولتكن سنة، بينما إرتفع سعر الوحدة من سلعة أخرى (ب)من ٥٠٠ جنيهاً إلى ٥٥٠ جنيهاً خلال نفس الفترة الزمنية، ففى مثل هذه الحالة يكون التغير المطلق فى سعر السلعة (أ) = ٢٥ - ٢٠ = ٥ جنيهات، والتغير المطلق فى سعر السلعة (ب) ٥٥٠ - ٥٠٠ = ٥٠ جنيهاً فإن قيمة التغير المطلق فى سعر السلعة الأولى (أ) أقل بكثير من قيمة التغير المطلق فى السلعة (ب) حيث بلغ هذا التغير فى السلعة

(ب) عشرة أضعاف نفس التغير فى السلعة (أ) .

٢ - أيضاً إذا أردنا مقارنة التغير فى عدد الطلاب بمؤسسة تعليمية فى فترة ما ، بالتغير فى قيمة الرسوم المحصلة لنفس المؤسسة خلال نفس الفترة، فإن المقارنة على أساس قيم مطلقة فى مثل هذه الحالة لن يكون له دلالة أو معنى وذلك لإختلاف نوعية وحدات القياس فى الحالتين السابقتين (طالب ، وجنيه أو دولار مثلاً) .

لكنه إذا ما أخذنا بالتغير النسبى فى الحالات السابقة فإننا سنجد فى الحالة (١) .

- التغير النسبى فى أسعار السلعة (أ) = $\frac{٥}{٢٠}$ × ١٠٠ = ٢٥ ٪

- التغير النسبى فى أسعار السلعة (ب) = $\frac{٥٠}{٥٠٠}$ × ١٠٠ = ١٠ ٪

ومنه نستنتج أن التغير النسبى فى أسعار السلعة (أ) - ٢٥ ٪ - أكبر من التغير النسبى فى أسعار السلعة (ب) - ١٠ ٪ - أى أن التغير النسبى فى أسعار السلعة (أ) أكبر من التغير النسبى فى أسعار السلعة (ب) لأن ٢٥ ٪ > ١٠ ٪ - والنتيجة السابقة هى عكس النتيجة فى حالة المقارنة على أساس التغير المطلق السابق.

وأيضاً يمكننا مقارنة التغير النسبى فى عدد الطلاب، بالتغير النسبى فى قيمة الرسوم المحصلة، وذلك لإنعدام وجود وحدات تمييز فى حالة إستخدام التغير النسبى، ومن ثم تكون للمقارنة فى الحالة الأخيرة وفقاً للقياس النسبى معنى ودلالة واضحة ودقيقة.

من كل ما سبق يتضح لنا أن الأخذ بالتغير النسبي في حالة مقارنة قيم ظاهرة أو متغير أو أكثر بالنسبة للزمن سواء أكانت هذه الظواهر أو المتغيرات ذات وحدات قياس واحدة أو ذات وحدات قياس مختلفة يعتبر معياراً أجدى وأدق للدلالة على مدى التغير في الظاهرة (أو المتغير) أو الظواهر بالنسبة للزمن وأيضاً مدى تغيرها من مكان لآخر.

ويطلق على مقياس التغير النسبي لظاهرة ما أو لمجموعة من الظواهر بالنسبة للزمن أو المكان « **بالرقم القياسي** » . فالرقم القياسي هو مؤشر ينشأ لبيان وقياس التغير أو التغيرات النسبية التي تطرأ على ظاهرة أو متغير ما أو في مجموعة من الظواهر المعينة بالنسبة لأساس محدد – قد يكون الزمان أو المكان – وبمعنى آخر هو مقياس إحصائي يستخدم للتعبير عن المستوى العام في رقم أو متغير أو مجموعة من المتغيرات بالنسبة للزمن، أو بالنسبة لمنطقة جغرافية إلى أخرى وعليه تعتبر الأرقام القياسية أساساً علمياً سليماً لقياس التغيرات في نواحي أو ظواهر متعددة سواء أكانت ظواهر اقتصادية أو إجتماعية أو تربوية ... الخ، ومن هنا إستخدمت الأرقام القياسية كأداة علمية سليمة ومفيدة في الأبحاث الاقتصادية والابحاث الإجتماعية والتربوية، كما تعددت الأرقام القياسية فالنسبة للأرقام القياسية لأسعار السلع هناك الأرقام القياسية لأسعار الجملة والارقام القياسية لأسعار التجزئة وبالنسبة للأرقام القياسية لكميات السلع هناك الأرقام القياسية للسلع المنتجة أو المستهلكة أو المصدرة أو المستوردة من ناحيةهذا بجانب الأرقام القياسية للأجور، والبطالة ، والنشاط الصناعي والزراعي والتجاري بالإضافة إلى الارقام القياسية لمستوى المعيشة ونفقتها، والأرقام القياسية المستخدمة في قياس الفقر النسبي، أو قياس الثراء النسبي في دولة أو منطقة ما أو لغير

ذلك من الظواهر الاجتماعية الأخرى أو الظواهر التربوية كقياس التغير فى درجات الذكاء بين مجموعات مختلفة من التلاميذ أو بين مجموعة محددة من التلاميذ قبل وبعد تطبيق منهاج دراسى محدد ... الخ.

وهناك فوائد وتطبيقات عملية عديدة للأرقام القياسية السابقة بإعتبارها آداة علمية نافعة فى نواحى متعددة - قياسية وتخطيطية (*) من أهمها :

١ - تستخدم الأرقام القياسية للأسعار - تجزئة أو جملة - خلال فترة زمنية محددة لإكتشاف سبب أو أسباب التغير فى هذه الأسعار وأثرها على النشاط الإقتصادى تمهيداً لإتخاذ الإجراءات المناسبة للتحكم فيه. حيث أنه بدون تحديد المستوى العام للأسعار لا نستطيع دراسة الحالة العامة للسوق ومن ثم تأثيرهما فى الحالة الإقتصادية لأيه دولة أو لأيه منطقة .

٢ - تستخدم الأرقام القياسية للإنتاج بصفة عامة، وللإنتاج الصناعى. والإنتاج الزراعى، وللتجارة الداخلية وللتجارة الخارجية، وللمخزون ... الخ كآداة علمية تخطيطية (تنبؤية) فى أيه دولة (ومن ثم للتعرف على الاتجاه العام والتغيرات الموسمية) وبالتالى إتخاذ إجراءات تنظيمية فى كل قطاع وفقاً للأساس السابق سواء فى المستقبل القريب أو البعيد.

٣ - إن التعرف الصحيح والدقيق للأحوال الإقتصادية لأى وحدة سياسية أو إقتصادية - دولة ما أو منطقة ما أو مؤسسة ما - لا يتأتى إلا بإستخدام بعض الأرقام القياسية للأسعار بمقارنتها بالأرقام القياسية

(*) بعد إتخاذ بعض الاحتياطيات الاحصائية.

للإنتاج على سبيل المثال، أو بأى أرقام قياسية أخرى، وذلك للمساهمة فى نواحى تخطيطية وتنظيمية فى كل منها.

٤ – إن توافر الأرقام القياسية للمشتغلين بصفة عامة، وفى كل ناحية من نواحى النشاط سواء أكانت صناعية أو على زراعية أو تجارية أو خدمية على حدة، وكذلك الأرقام القياسية للبطالة بصفة عامة وفى كل ناحية من نواحى النشاط الاقتصادى والخدمى السابقة على حدة، سواء تم ما سبق على مستوى الدولة أو على مستوى مناطق جغرافية محددة سوف تقدم مساعدات هامة وفعالة على المستويات التخطيطية والتنفيذية والبحثية فى أية دولة فى السابق الإشارة إليها عالية المجالات.

٥ – تعتبر الأرقام القياسية أداة علمية هامة تفيد رجال الأعمال عند اتخاذ قرارات الزيادة فى أجور عمالهم عند زيادة إنتاجية هؤلاء العمال، بما يعمل على تحقيق المصالح الخاصة لكل من العمال ورجال الأعمال بجانب المصلحة العامة للدولة ككل.

٦ – تتخذ بعض الأرقام القياسية كحجة هامة للنقابات العمالية – خصوصاً فى الدول الرأسمالية – عند ربطهم بين زيادة أجور أعضاء نقاباتهم بالزيادة فى الرقم القياسى لنفقة المعيشة، وذلك محافظة على المستوى المعيشى لأفراد نقابتهم، كما تحاول بعض الدول – خصوصاً الدول المتقدمة إقتصادياً – ربط مستويات الأجور للعاملين به بالمستوى العام لنفقة المعيشة بالدولة حفاظاً على نفس الغرض السابق.

٧ ـ تعتبر الأرقام القياسية آداة نافعة لقياس التغير فى مستوى معيشة

مجموعة محددة من الأفراد ـ سواء لفئة سكانية أو لفئة عمالية – بقياس القوة الشرائية للنقود وذلك عن طريق قسمة كل من الرقم القياسى لدخولهم النقدية ÷ الرقم القياسى لنفقة المعيشة فى نفس الفترة ، بهدف الحصول على الرقم القياسى للدخل أو الأجر الحقيقى (*) ، والأخير يوضح مدى التغير فى مستوى معيشة هذه المجموعة من الأفراد ، وبالتالى مساعدة المسئولين على إتخاذ قرارات عادلة وفعالة تجاه هذه المجموعة من الأفراد من حيث نوع ومدى المساعدات الممكن تقديمها لهذه المجموعة عندما تدعو الحالة إلى ذلك من ناحية ، ومن ناحية أخرى بتحديد نوع ومدى الاستقطاعات النقدية الواجب تحميل أفراد هذه المجموعة به فى صورة رسوم أو ضرائب إذا دعت الحالة إلى ذلك أيضاً . فمثلاً إذا كانت هناك مجموعة محددة من الأفراد ، بلغ متوسط الدخل الإسمى للفرد الواحد منها، (٥٠٠٠ جنيه عام ١٩٨٥) ثم إرتفع نفس الدخل إلى ٨٠٠٠ جنيه حتى عام ١٩٩٥ ، وخلال نفس الفترة (٨٥ ـ ١٩٩٥) إرتفع الرقم القياسى لنفقة المعيشة من ١٠٠ ٪ إلى ١٣٠ ٪، فى مثل هذه الحالة يكون الدخل الإسمى قد إرتفع بقيمة (٨٠٠٠ ـ ٥٠٠٠ = ٣٠٠٠ جنيه) أى بما يعادل ٦٠ ٪ من الدخل الإسمى عام ١٩٨٥ .

(*) عادة يستخدم الرقم القياسى لنفقة المعيشة فى قياس الدخل الحقيقى (القوة الشرائية للنقود) وهو ما يستطيع أن يشتريه هذا الدخل من سلع وخدمات آخذاً فى الإعتبار أسعار تلك السلع والخدمات

الدخل الحقيقى (القوة الشرائية للنقود عند نقطة معينة) = $\frac{\text{الدخل الإسمى}}{\text{الرقم القياسى لنفقة المعيشة}}$ × ١٠٠ عند نفس النقطة

لكن فى مثل هذه الحالة أيضاً يمكننا القول أن (الدخل الحقيقى أو

القوة الشرائية وهو = $\frac{\text{الدخل الأسمى}}{\text{الرقم القياسى لنفقة المعيشة}} \times ١٠٠$) قد إرتفع

خلال نفس الفترة من ($\frac{٥٠٠٠}{١٠٠} \times ١٠٠ = ٥٠٠٠$ جنيه عام ١٩٨٥ إلى

($\frac{٨٠٠٠}{١٣٠} \times ١٠٠$) = ٦١٥٣,٨٥ جنيه فقط

وما سبق يعنى أن الزيادة الاسمية فى الدخل وقدرها ٣٠٠٠ جنيه قادرة على شراء سلع وخدمات بقيمة (٦١٥٣,٨٥ – ٥٠٠٠) = ١١٥٣,٨٥

جنيه فقط أى لا تتعدى نسبة الزيادة فى الدخل الحقيقى $\frac{١١٥٣,٨٥}{٦١٥٣,٨٥} \times$

١٠٠ = ١٨,٧ ٪ فقط من الزيادة فى الدخل الإسمى بسبب التغير فى أسعار السلع الخدمات الداخلة فى تركيب الرقم القياسى لنفقة المعيشة.

وعليه للحفاظ على المستوى المعيشى لأفراد هذه المجموعة يجب زيادة متوسط الدخل الأسمى لهم عما هو عليه عام ١٩٩٥ (٨٠٠٠ جنيه) بغرض الحفاظ على ثبات نفقة المعيشة على ما هى عليه عام ١٩٩٥.

والعكس صحيح إذا إرتفعت نسبة الزيادة فى الدخل الحقيقى عن ٣٠ ٪ مع ثبات نسبة التغير فى نفقة المعيشة عند ٣٠ ٪، هنا يجب فرض ضرائب ورسوم على أفراد هذه المجموعة من الأشخاص حفاظاً على ثبات المستوى المعيشى مع باقى الفئات الأخرى.

من كل ما سبق يتضح لنا أن الأرقام القياسية تعطى صورة دقيقة فى

كافة الأحوال والتطبيقات، وذلك على عكس ما تعطيه الأرقام المجردة أو المطلقة.

كما نود أن نشير هنا أن إستخدام الأرقام القياسية كأساس للمقارنة النسبية ليس قاصراً دائماً على مقارنة التغير على ظاهرة ما زمانياً أو مكانياً، بل يمكن أن تتم المقارنة المشار إليها بين ظاهرتين أو أكثر مختلفين، فعلى سبيل المثال يمكن المقارنة بين التغيرات فى أسعار سلعة ما والتغيرات فى الكميات المستهلكة منها، أيضاً يمكن المقارنة بين التغيرات فى نفقة المعيشة ومستويات الأجور فى منطقة ما، أو بين عدة مناطق مختلفة، ونفس الأمر بين التغيرات فى القيمة المضافة فى قطاع محدد، والتغيرات فى عدد المشتغلين فى نفس القطاع ... وهكذا.

تركيب الأرقام القياسية :

لإمكان تركيب رقم قياسى – لظاهرة ما أو لعدة ظواهر – فإن الأمر يتطلب التفرقة بين:

أولاً : الأرقام القياسية الزمانية :

هنا يتطلب الأمر تحديد فترة أساس للظاهرة أو الظواهر موضوع القياس وليكن سنة أو عام (١٩٨٠) مثلاً يطلق عليها سنة الأساس بإعتبارها سنة عادية – لحدوث مثل هذه الظاهرة – أى أنها سنة لم يحدث خلالها أمر شاذ يؤثر على قيمة هذه الظاهرة فى هذه السنة سواء أكان أمراً إقتصادياً أو اجتماعياً أو سياسياً وبمعنى آخر أنه يجب أن تكون فترة (سنة) الأساس فترة إستقرار من جميع النواحى حتى لا يتأثر الرقم القياسى بأى تأثيرات جانبية كأن تكون سنة ثورة أو أضطرابات سياسية أو فترة رواج أو فترة إضطرابات مناخية حتى لا تكون المقارنة بها غير ذات جدوى فعلية،

كما يتطلب الأمر أيضاً تحديد فترة (أو سنة) مقارنة للظاهرة أو للظواهر موضوع القياس، ولتكن سنة أخرى لاحقة لسنة الأساس السابق – ١٩٨٠ – يطلق عليها فترة أو سنة المقارنة حيث أن.

$$\text{الرقم القياسى للظاهرة} = \frac{\text{قيمة الظاهرة أو الظواهر فى فترة (سنة) المقارنة}}{\text{قيمة الظاهرة أو الظواهر فى فترة (سنة) الأساس}} \times ١٠٠$$

ثانياً : الأرقام القياسية المكانية :

حيث يستلزم الأمر أيضاً تحديد مكان الأساس للظاهرة أو للظواهر موضوع القياس – لتكن منطقة جغرافية أو بلد محدد – يطلق عليه مكان الأساس، ولتكن مدينة لندن عام ١٩٩٥ باعتبارها مكاناً يتمتع بأهمية خاصة من حيث إستمرارية تداول السلعة بإعتبارها سوقاً دولية أو بورصة عالمية للظاهرة أو الظواهر موضوع القياس.

كما يستلزم الأمر أيضاً تحديد مكان المقارنة ولتكن منطقة أخرى كمدينة الاسكندرية فى نفس العام – ١٩٩٥ – يطلق عليها مكان المقارنة حيث أن :

$$\text{الرقم القياسى للظاهرة} = \frac{\text{قيمة الظاهرة أو الظواهر فى مكان المقارنة}}{\text{قيمة الظاهرة أو الظواهر فى مكان الأساس}} \times ١٠٠$$

أى أن الرقم القياسى زمانياً أو مكانياً

$$= \frac{\text{قيمة الظاهرة أو الظواهر فى نقطة المقارنة}}{\text{قيمة الظاهرة أو الظواهر فى نقطة الأساس}} \times ١٠٠$$

وإن كنا فى هذا الفصل ستقتصر دراستنا على تركيب الأرقام القياسية للأسعار والكميات.

علماً بأن الطرق المستعملة فى دراسة ظاهرة الأسعار تنطبق على الظواهر الأخرى كالإنتاج والأجور والعمالة ... الخ، مع تغيير بسيط من ناحية الرموز المستخدمة والعوامل الداخلة فى تركيب الرقم القياسى.

ثانياً: الأرقام القياسية للأسعار:

١ – مقدمة : وتشير هذه الأرقام إلى التغيرات التى تحدث فى السعر أو الأسعار فى دائرة جغرافية محددة خلال فترات زمنية مختلفة – الأرقام القياسية الزمانية للأسعار – أو التغيرات فى السعر أو الأسعار فى فترة زمنية محددة بالنسبة لمناطق جغرافية مختلفة – الأرقام القياسية المكانية للأسعار – سواء أكانت أرقام قياسية لأسعار سلع ضرورية أو لأسعار سلع كمالية من ناحية أو لأسعار الجملة أو لأسعار المستهلكين (القطاعى أو المفرق) من ناحية أخرى أو لأسعار سلع صناعية أو سلع زراعية ... الخ من ناحية ثالثة، ذلك أن أسعار السلع – أيا كانت معروف أنها تتغير من زمان إلى زمان أو من مكان إلى مكان ، ولقياس التغير الذى يطرأ على الأسعار للسلع السابقة، نستخدم الأرقام القياسية للأسعار – زمانياً أو مكانياً – وذلك بتحديد كل من سعر السلعة – لوحدة معينة فى نقطة زمانية أو نقطة

مكانية يتم إختيارها – يراعى عند اختيارها الشروط السابق الإشارة إليها عند إختيار فترة أو مكان الأساس – ونسبتها إلى سعر نفس السلعة – لنفس الوحدة المحددة أيضاً فيما سبق – لنفس الوحدة المحددة أيضاً فيما سبق – عند النقطة الزمانية أو المكانية التى يراد قياس التغير أو المقارنة عندها، ويطلق عليها « نقطة المقارنة » حيث أن :

$$\text{الرقم القياسى للأسعار} = \frac{\text{سعر السلعة أو أسعار السلع عند نقطة المقارنة}}{\text{سعر السلعة أو أسعار السلع عند نقطة الأساس}} \times ١٠٠$$

٢ - الرموز المستخدمة :

سنرمز إلى السعر بالرمز (ع) وللتفرقة بين :

– السعر (ع) فى نقطة الأساس – سواء أكانت زمانية أو مكانية سنستخدم الدليل صفر (٠) أسفل الحرف ع أى ($ع_{٠}$).

– السعر (ع) فى نقطة المقارنة سنستخدم الدليل واحد (١) أسفل الحرف ع أى ($ع_{١}$) أى أن :

– السعر عند نقطة الأساس سنرمز له بالرمز ($ع_{٠}$) ، والسعر عند نقطة المقارنة سنرمز له بالرمز ($ع_{١}$).

كما سنرمز إلى الكمية بالرمز (ك) وعلى نفس الأساس السابق يمكن التفرقة بين الكميات فى نقطة الأساس ونقطة المقارنة، حيث تشير ($ك_{٠}$) إلى الكمية عند نقطة الأساس، ($ك_{١}$) تشير إلى الكمية عند نقطة المقارنة.

كما سنرمز إلى القيمة (الكمية × السعر) بالحرف (ق) وستشير ($ق_{٠}$) إلى القيمة فى نقطة الأساس، ($ق_{١}$) إلى القيمة فى نقطة المقارنة.

وعليه فإنه يمكن تلخيص الرموز المستخدمة من حيث السعر والكمية والقيمة فى كل من نقطة الأساس ونقطة المقارنة كما يلى :

البيـان	الرمز فى نقطة الأساس	الرمز فى نقطة المقارنة
السعر (ع)	$ع_{.}$	$ع_{1}$
الكمية (ك)	$ك_{.}$	$ك_{1}$
القيمة (ق)	$ق_{.}$	$ق_{1}$

فإذا تطلب الأمر تركيب رقم قياسى للسعر أو للكمية أو القيمة لعدة سلع مختلفة فإننا للتفرقة بين الأرقام القياسية للأسعار أو الأرقام القياسية للكميات أو الأرقام القياسية للقيم لمثل هذه السلع المختلفة سوف يكون الدليل أسفل ع أو ك أو ق مزدوجاً أى مكونا من رقمين متجاورين حيث يشير الرقم الأول إلى نقطة الأساس أو المقارنة بينما يشير الرقم الثانى إلى ترتيب السلعة، فمثلاً إذا كان لدينا عدة سلع (ثلاثة مثلاً) سنجد عند تركيب الرقم القياسى لكل هذه السلع:

	السلعة الأولى	السلعة الثانية	السلعة الثالثة	
الأسعار فى نقطة الأساس :	$ع_{10}$ ،	$ع_{20}$ ،	$ع_{30}$	على الترتيب
الأسعار فى نقطة المقارنة :	$ع_{11}$ ،	$ع_{21}$ ،	$ع_{31}$	على الترتيب
الكميات فى نقطة الأساس :	$ك_{10}$ ،	$ك_{20}$ ،	$ك_{30}$	على الترتيب
الكميات فى نقطة المقارنة :	$ك_{11}$ ،	$ك_{21}$ ،	$ك_{31}$	على الترتيب
الأسعار فى نقطة الأساس :	$ق_{10}$ ،	$ق_{20}$ ،	$ق_{30}$	على الترتيب
الأسعار فى نقطة المقارنة :	$ق_{11}$ ،	$ق_{21}$ ،	$ق_{31}$	على الترتيب

ومن ثم تكون أبسط صيغة للأرقام القياسية للأسعار هى :

أولاً : منسوب السعر *(The price Relating)*:

ويقصد به إظهار سعر سلعة واحدة معينة فى فترة المقارنة (Current orgiven Period) منسوباً إلى نفس السلعة فى فترة الأساس (Base Period) نعبر عنه كما يلى :

$$\text{منسوب السعر للسلعة} = \frac{\text{السعر فى فترة المقارنة}}{\text{إلى السعر فى فترة الأساس}} \times ١٠٠ \quad ...(١)$$

$$\text{أى منسوب السعر} = \frac{ع_١}{ع_٠} \times ١٠٠$$

$$\text{وعليه فإن منسوب الكمية} = \frac{ك_١}{ك_٠} \times ١٠٠$$

$$\text{منسوب القيمة} = \frac{ق_١}{ق_٠} \times ١٠٠$$

٢ - طرق حساب الأرقام القياسية المختلفة لمجموعة من السلع :

هناك طريقتان لتركيب الأرقام القياسية لمجموعة من السلع.

أولهما : تتعامل مع أسعار – أو كميات أو قيم – السلع مباشرة ويطلق عليها الأرقام القياسية التجميعية.

ثانيهما : تتعامل مع مناسيب الأسعار أو الكميات أو قيم هذه السلع ويطلق عليها الأرقام القياسية المتوسطة.

وسنتناول الأسس التى يمكن أن يبنى عليها تركيب أرقام قياسية للأسعار.

ثانيـاً : الأرقام القياسية التـجميعية (Aggregative tupe) التى تتـعـامل مع أسعار أو كميات أو قيم السلع مباشرة.

(أ) الرقم القيـاسى التجميعى البسيـط للأسعار:

ولتركيب هذا الرقم يتم قسمة مجموع حاصل جمع أسعار المقارنة لمجموعة السلع الداخلة فى تركيب هذا الرقم على مجموع حاصل جمع أسعار الأساس لنفس السلع بدون مفاضلة أو ترجيح سلعة على سلعة أخرى، أى باعتبار أن الأهميات النسبية لمجموعة السلع الداخلة فى تركيب الرقم القياسى متعادلة، وعليه فإذا كانت هناك (ن) من السلع الداخلة فى تركيب رقم قياسى تجميعى بسيط للأسعار فإن:

الرقم القياسى التجميعى البسيط للأسعار لمجموعة هذه السلع

$$= \frac{ع_{١١} + ع_{٢١} + ع_{٣١} + \cdots + ع_{ن١}}{ع_{١٠} + ع_{٢٠} + ع_{٣٠} + \cdots + ع_{ن٠}} \times ١٠٠$$

$$\text{أى} = \frac{\text{مجـ}\ ع_{١}}{\text{مجـ}\ ع_{٠}} \times ١٠٠ \quad .. .. \quad (٢)$$

مثـال (١) إذا علم لديك أسعار السلع والخدمات التالية فى سنتى ١٩٩٥، ١٩٩٩ (بالقرش).

جدول رقم (١)

البيـــان	السلعة (١) الخـبز	السلعة (٢) اللـبن	السلعة (٣) اللحم	السلعة (٤) الغاز الطبيعى	السلعة (٥) تذكرة الطائرة (محلياً)	
الوحدة التى يتم على أساسها التسعير	الرغيف	لـتر	الكيلو جرام	المتر المكعب	التذكرة	المجموع
السعر عام ١٩٩٥ (ع.)	٢	١٠٠	١٥٠٠	٦٠	٣٠٠٠	٤٦٦٢
السعر عام ١٩٩٩ (ع١)	٥	١٦٠	٢٠٠٠	٨٧	٦٠٠٠	٨٢٥٢

والمطلوب حساب الرقم القياسى التجميعى البسيط للأسعار لمجموعة السلع والخدمات السابقة.

الحـــــل :

الرقم القياسى التجميعى البسيط للأسعار = $\frac{\text{مجـ ع}_١}{\text{مجـ ع}_.} \times ١٠٠$

$= \frac{٥ + ١٦٠ + ٢٠٠٠ + ٨٧ + ٦٠٠٠}{٢ + ١٠٠ + ١٥٠٠ + ٦٠ + ٣٠٠٠} \times ١٠٠$

$= \frac{٨٢٥٢}{٤٦٦٢} \times ١٠٠ = ١٧٧ \%$ (حيث نقطة الأساس = ١٠٠ ٪)

وذلك يعنى أن المتوسط العام للأسعار لمجموعة السلع الداخلة فى تركيب الرقم القياسى قد ارتفعت فى نقطة المقارنة (عام ١٩٩٩) عنه فى نقطة الأساس (عام ١٩٩٥) بنسبة قدرها ٧٧٪ أو بمعنى آخر أن المستوى العام للأسعار فى نقطة المقارنة (١٩٩٩) بلغ ١٧٧٪ بالمقارنة بأسعار مجموعة نفس السلع فى نقطة الأساس (١٩٩٥) والبالغة ١٠٠٪ وأهم ما يلاحظ على الرقم القياسى التجميعى البسيط السابق ما يلى :

- أنه من أسهل الأرقام القياسية عملاً وتركيباً حيث تعتمد الفكرة التى يقوم عليها فى أننا ننسب مجموعة أسعار مكونات السلع الداخلة فى تركيبه فى نقطة المقارنة إلى مجموعة أسعار نفس السلع فى نقطة الأساس (كما سبق فى حل المثال السابق)، وأن كانت بساطة هذا الرقم وسهولته ميزة فإنهما يعتبراً عيباً يؤخذ عليه للآتى:

أن هذا الرقم يقيس لنا التغير فى التكلفة المجمعة لشراء وحدة واحدة من مجموعة السلع الداخلة فى تركيبه بوحدات قياس كل سلعة منها والتى هى أساس التسعير لكل منها أو بمعنى آخر التكلفة المجمعة لشراء كل من رغيف خبز واحد، ولتر واحد من اللبن، وكيلو من اللحم ، ومتر مكعب من الغاز الطبيعى، وتذكرة طيران واحدة محلية، وعليه فلو تغيرت وحدات القياس التسعيرية فى المثال رقم (١) السابق بالنسبة للخبز إلى طاولة خبز وتساوى (٥ أرغفة) بدلاً من الرغيف، وتذكرة الطائرة الواحدة إلى تذكرتين وتثبيت وحدات السلع الأخرى على ما عليه فى المثال رقم (١) فإن : .

الرقم القياسى التجميعى البسيط للأسعار فى هذه الحالة أى بعد

التعديل الأول = $\frac{١٤٢٧٢}{٧٦٧٠} \times ١٠٠ = ١٨٦٪$

مما سبق يتضح لنا أن طريقة حساب هذا الرقم القياسى تعتمد إعتماداً كبيراً على وحدات القياس التى يتم على أساسها التسعير، ذلك أنه عندما حدثت تغيرات فى وحدات القياس التسعيرية لسلعتين فقط إرتفع متوسط التغير فى المستوى العام لأسعار إلى ٨٦٪ فى الحالة الثانية بدلاً من الحالة الأولى (مثال ١) ولزيادة إيضاح العيب السابق إذا تغيرت وحدة القياس بالنسبة للسلعة (٣) من كيلو لحم واحد إلى خمسة كيلو جرامات من اللحم وأيضاً إذا تغيرت وحدات القياس بالنسبة للسلعة رقم (٤) من متر مكعب واحد من الغاز الطبيعى إلى (خمسة أمتار مكعبة) وبقيت وحدات القياس التسعيرية الأخرى على ما هى عليه كما فى المثال رقم (١) فإن:

الرقم القياسى التجميعى البسيط للأسعار فى هذا الحالة

(أى بعد التعديل الأخير) = $\frac{١٦٦٠٠}{١٠٩٠٢}$ × ١٠٠ = ١٥٢٪

وهذا يعنى أن متوسطا التغير فى المستوى العام للأسعار – بعد تغيير وحدات القياس التسعيرية لسلعتين فقط هما السلعتين رقمى (٣، ٤) فى الحالة الأخيرة إنخفضت زيادته من ٧٧٪ إلى ٥٢٪ فقط.

٣ – إن الرقم التجميعى البسيط للأسعار يعامل كافة السلع الداخلة فى تركيبة معاملة واحدة دون تمييز احداهما عن الأخرى بما يتناسب مع أهميتها سواء أكانت سلعة ضرورية أو كما ليه ، وبمعنى آخر أن هذا الرقم لا يأخذ فى الاعتبار الأهمية النسبية للسلعة سواء فى نقطة المقارنة أو فى نقطة الأساس.

٤ – فضلاً عن اختلاف الوحدات القياسية المستعملة فى تسعير السلع المختلفة الداخلة فى تركيب هذا الرقم القياسى وما ينشأ عنه من تكبير

أو تصغير لكل من ($ع_1$) ، ($ع_2$) يُعطى بعض السلع أهمية مفتعلة وليست حقيقية، فمثلا إذا كانت $ع_1$ لرغيف الخبز = (٢ قرش) فى حين كانت $ع_2$ (٣٠٠٠ قرش) لتذكرة الطائرة المحلية نجد أن $ع_1$ لرغيف الخبز صغيرة جداً بالنسبة إلى $ع_2$ لتذكرة الطائرة وبذلك نعطى لسعر تذكرة الطائرة وتغيراته وزناً وأهمية أكبر من سعر الخبز الذى فى الحقيقة أولى بهذه الأهمية.

من كل ما تقدم يتضح أن مجمل عيوب هذا الرقم القياسى تفوق ما يتميز به من السهولة والبساطة فى عمله وتركيبه، لذا كان يجب البحث عن رقم قياسى تجميعى آخر يقضى على بعض أو كل العيوب فى الرقم القياسى السابق.

(ب) الأرقام القياسية التجميعية المرجحة: (Weighed Aggregate)

وتقوم هذه الأرقام على الأخذ فى إعتبارها الأهمية النسبية لكل سلعة، وبالطبع لا يتأتى ما سبق إلا بترجيح السلعة ذات الأهمية الأكبر بوزن يتناسب مع أهميتها لذا يتطلب الأمر هنا البحث عن معيار معقول يعطى وزناً حقيقياً للأهمية النسبية لكل سلعة تدخل فى تركيب الرقم القياسى التجميعى البسيط، وبعد الدراسة والتحليل وجد أن أهم وأفضل الأوزان الترجيحية المناسبة لكل سلعة هو الكميات سواء أكانت كمياته المستهلكة أو كمياته المنتجة أو كمياته المشتراة على حسب الغرض من تركيب الرقم القياسى .

والسؤال هنا إذا ما تم أخذ معيار الكمية كأساس علمى صحيح ودقيق للترجيح، فهل نستخدم الكميات المتداولة فى نقطة الأساس أم الكميات المتداولة فى نقطة المقارنة لإجراء الترجيح وعلى ذلك فإنه يمكننا أن نحصل على صيغتين لتركيب الرقم القياسى التجميعى المرجح هما:

١ – الرقم القياسى التجميعى المرجح بكميات نقطة الأساس (الرقم

القياسي للاسبير) . وهنا سيتم ترجيح أسعار كل سلعة بالكميات المستهلكة أو المشتراه في نقطة الأساس في كل من البسط والمقام وبفرض أنه :

كان هناك (ن) من السلع المختلفة مثلاً و هي :

	السلعة (١)	السلعة (٢)	السلعة (٣)	السلعة (ن)
١ - السعر في نقطة الأساس للوحدة ($ع_٠$)	$ع_{١٠}$ ،	$ع_{٢٠}$ ،	$ع_{٣٠}$ ،....،	$ع_{ن٠}$
٢ - السعر في نقطة المقارنة ($ع_١$)	$ع_{١١}$ ،	$ع_{٢١}$ ،	$ع_{٣١}$ ،....،	$ع_{ن١}$
٣ - الكميات المتداولة في نقطة الأساس ($ك_٠$)	$ك_{١٠}$ ،	$ك_{٢٠}$ ،	$ك_{٣٠}$ ،....،	$ك_{ن٠}$

فإن : الرقم القياسي التجميعي للأسعار المرجح بكميات نقطة الأساس (رقم لاسبير للأسعار)

$$= \frac{ع_{١١} \times ك_{١٠} + ع_{٢١} \times ك_{٢٠} + ع_{٣١} \times ك_{٣٠} + \cdots + ع_{ن١} \times ك_{ن٠}}{ع_{١٠} \times ك_{١٠} + ع_{٢٠} \times ك_{٢٠} + ع_{٣٠} \times ك_{٣٠} + \cdots + ع_{ن٠} \times ك_{ن٠}}$$

$$= \frac{\text{مجـ } ع_١ ك_٠}{\text{مجـ } ع_٠ ك_٠} \times ١٠٠ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٣)$$

والرقم القياسي للاسبير يفترض ثبات أذواق المستهلكين ، أي أنهم يستمرون في استهلاك نفس كميات السلع بصرف النظر عن إرتفاع أو إنخفاض أسعارها ، في حين أنه وفقاً للواقع العملي سيكون هناك تحول إلى السلع التي إنخفضت أسعارها بفرض ثبات المواصفات . وذلك يعني أن

صيغة لاسبير السابقة متحيزة إلى أعلى ذلك لأن النفقات اللازمة للحصول على نفس الكميات تكون أعلى من النفقات اللازمة للحصول على نفس درجة المنفعة .

مثـــال (٢) :

جـــدول رقـم (٢)

البيـــان	السلعة (١) (الخبز)	السلعة (٢) (اللبن)	السلعة (٣) (اللحم)	السلعة (٤) (الغاز الطبيعى)	السلعة (٥) (تذكرة طائرة)	المجموع
الوحدة التى يتم على أساسها التسعير	الرغيف	اللتر	كيلوجرام	المتر المكعب	التذكرة	
السعر بالقرش عـام١٩٩٥ (ع$_{٠}$)	٢	١٠٠	١٥٠٠	٦٠	٣٠٠٠	—
السعر بالقرش عـام١٩٩٩ (ع$_{١}$)	٥	١٦٠	٢٠٠٠	٨٧	٦٠٠٠	—
الكمية المستهلكة لأسـرة متوسطة العدد عـام(١٩٩٥) (ك$_{٠}$)	٧٣٠٠	٧٣٠	٣٦٥	١٢٠	٤	٨٥١٩
الكمية المستهلكة للأسـرة عـام(١٩٩٩) (ك$_{١}$)	٨٠٠٠	٩٠٠	٤٨٠	١٥٠	٦	٩٥٣٦

الحـل :

∴ الرقم القياسى للأسعار المرجح بكميات نقطة الأساس (لاسبير)

(Laspeyre 's Price Index)

$$= \frac{ع_{١١} \times ك_{١٠} + ع_{٢١} \times ك_{٢٠} + ع_{٣١} \times ك_{٣٠} + ع_{٤١} \times ك_{٤٠} + ع_{٥١} \times ك_{٥٠}}{ع_{١٠} \times ك_{١٠} + ع_{٢٠} \times ك_{٢٠} + ع_{٣٠} \times ك_{٣٠} + ع_{٤٠} \times ك_{٤٠} + ع_{٥٠} \times ك_{٥٠}} \times ١٠٠$$

$$= \frac{٥ \times ٧٣٠٠ + ١٦٠ \times ٧٣٠ + ٢٠٠٠ \times ٣٦٥ + ٨٧ \times ١٢٠ + ٦٠٠٠ \times ٤}{٢ \times ٧٣٠٠ + ١٠٠ \times ٧٣٠ + ١٥٠٠ \times ٣٦٥ + ٦٠ \times ١٢٠ + ٣٠٠٠ \times ٤} \times ١٠٠$$

$$= \frac{٣٦٥٠٠ + ١١٦٨٠٠ + ٧٣٠٠٠٠ + ١٠٤٤٠ + ٢٤٠٠٠}{١٤٦٠٠ + ٧٣٠٠٠ + ٥٤٧٥٠٠ + ٧٢٠٠ + ١٢٠٠٠} \times ١٠٠$$

$$= \frac{٩١٧٧٤٠}{٦٥٤٣٠٠} \times ١٠٠$$

$$= ١٤٠,٣ \%$$

وذلك يعنى حدوث زيادة فى أسعار السلع والخدمات بنسبة ٤٠,٣٪ عام ١٩٩٩ عنه فى عام ١٩٩٥.

٢ – الرقم القياسى التجميعى للأسعار المرجح بكميات نقطة المقارنة (الرقم القياسى لباشى للأسعار) (Paashe' price Index)

وهنا سيتم ترجيح أسعار كل سلعة بالكميات المستهلكة أو المشتراه فى نقطة المقارنة فى كل من البسط والمقام أيضاً :

وبفرض أن هناك (ن) من السلع المختلفة وهى:

	السلعة (١)	السلعة (٢)	السلعة (٣)	السلعة (ن)
١ – السعر فى نقطة الأساس للوحدة $(ع_{.})$	$ع_{.١}$ ،	$ع_{.٢}$ ،	$ع_{.٣}$ ، ....،	$ع_{.ن}$
٢ – السعر فى نقطة المقارنة $(ع_{١})$	$ع_{١١}$ ،	$ع_{٢١}$ ،	$ع_{٣١}$ ، ....،	$ع_{ن١}$
٣ – الكميات المتداولة فى نقطة المقارنة $(ك_{١})$	$ك_{١١}$ ،	$ك_{٢١}$ ،	$ك_{٣١}$ ، ....،	$ك_{ن١}$

فإن الرقم القياسى التجميعى للأسعار المرجح (رقم باشى للأسعار)

$$= \frac{ع_{١١} \times ك_{١١} + ع_{٢١} \times ك_{٢١} + \cdots\cdots + ع_{ن١} \times ك_{ن١}}{ع_{.١} \times ك_{١١} + ع_{.٢} \times ك_{٢١} + ع_{.٣} \times ك_{٣١} + \cdots + ع_{.ن} \times ك_{ن١}} \times ١٠٠$$

$$= \frac{مج\ ع_{١}\ ك_{١}}{مج\ ع_{.}\ ك_{١}} \times ١٠٠ \quad .. .. \quad (٤)$$

والرقم القياسى السابق لباشى يفترض أن المستهلك يكون قد اشترى كميات فى سنة الأساس بنفس كميات السلع التى إشتراها فى سنة المقارنة، وبالطبع ذلك ليس معقولاً، لأن النفقات اللازمة للحصول على كميات السلع

فى سنة الأساس تكون أكبر من نفقات الحصول على الإشباع الاقتصادى فى سنة المقارنة، لكل ما سبق يكون الرقم القياسى السابق لباشى متحيزاً إلى أسفل.

مثـال (٣) :

أوجد الرقم القياسى للأسعار المرجح بكميات نقطة المقارنة (باشى) من بيانات المثال رقم (٢) السابق.

الحـل :

∴ الرقم القياسى للأسعار المرجح بكميات نقطة المقارنة (باشى).

$$= \frac{ع_{١١} \times ك_{١١} + ع_{٢١} \times ك_{٢١} + ع_{٣١} \times ك_{٣١} + ع_{٤١} \times ك_{٤١} + ع_{٥١} \times ك_{٥١}}{ع_{١٠} \times ك_{١١} + ع_{٢٠} \times ك_{٢١} + ع_{٣٠} \times ك_{٣١} + ع_{٤٠} \times ك_{٤١} + ع_{٥٠} \times ك_{٥١}} \times ١٠٠$$

$$= \frac{٦ \times ٦٠٠٠ + ١٥٠ \times ٨٧ + ٤٨٠ \times ٢٠٠٠ + ٩٠٠ \times ١٦٠ + ٨٠٠٠ \times ٥}{٦ \times ٣٠٠٠ + ١٥٠ \times ٦٠ + ٤٨٠ \times ١٥٠٠ + ٩٠٠ \times ١٠٠ + ٨٠٠٠ \times ٢} \times ١٠٠$$

$$= \frac{٣٦٠٠٠ + ١٣٠٥٠ + ٩٦٠٠٠٠ + ١٤٤٠٠٠ + ٤٠٠٠٠}{١٨٠٠٠ + ٩٠٠٠ + ٧٢٠٠٠٠ + ٩٠٠٠٠ + ١٦٠٠٠} \times ١٠٠$$

$$= \frac{١١٩٣٠٥٠}{٨٥٣٠٠٠} \times ١٠٠$$

$$= ١٣٩,٦ \%$$

لكن نود أن نوجه النظر هنا أنه لتسهيل وتركيز العمليات الحسابية عند حل الحالات الخاصة للأرقام القياسية التجميعية البسيطة رقمى لاسبير وباشى فى الأمثلة السابقة سنعد جدولاً سيتخذ كأساس لحساب الأرقام السابقة كما يلى (طريقة أسهل وأدق).

جدول رقم (٣)

السلعة	الأسعار		الكميات		$ع_٠ ك_٠$	$ع_٠ ك_١$	$ع_١ ك_٠$	$ع_١ ك_١$
	$ع_٠$	$ع_١$	$ك_٠$	$ك_١$				
الأولى ولتكن (أ)	٢	٥	٧٣٠٠	٨٠٠٠	١٤٦٠٠	١٦٠٠٠	٣٦٥٠٠	٤٠٠٠٠
الثانية « (ب)	١٠٠	١٦٠	٧٣٠	٩٠٠	٧٣٠٠٠	٩٠٠٠٠	١١٦٨٠٠	١٤٤٠٠٠
الثالثة « (حـ)	١٥٠٠	٢٠٠٠	٣٦٥	٤٨٠	٥٤٧٥٠٠	٧٢٠٠٠٠	٧٣٠٠٠٠	٩٦٠٠٠٠
الرابعة « (د)	٦٠	٨٧	١٢٠	١٥٠	٧٢٠٠	٩٠٠٠	١٠٤٤٠	١٣٠٥٠
الخامسة « (هـ)	٣٠٠٠	٦٠٠٠	٤	٦	١٢٠٠٠	١٢٠٠٠	٢٤٠٠٠	٣٦٠٠٠
المجموع	٤٦٦٢	٨٢٥٢	٨٥١٩	٩٥٣٦	٦٥٤٣٠٠	٨٥٣٠٠٠	٩١٧٧٤٠	١١٩٣٠٥٠

من الجدول السابق يمكن حساب كل من الأرقام القياسية التالية مباشرة:

١ - الرقم القياسي التجميعي البسيط للأسعار = $\frac{مجـ ع_{1}}{مجـ ع_{0}} \times ١٠٠$

$= \frac{٨٢٥٢}{٤٦٦٢} \times ١٠٠$

$=$ ١٧٧٪

٢ - الرقم القياسي التجميعي المرجح للأسعار (لا سبير)

$= \frac{مجـ ع_{1} ك_{0}}{مجـ ع_{0} ك_{0}} \times ١٠٠$

$= \frac{٩١٧٧٤٠}{٦٥٤٣٠٠} \times ١٠٠$

$=$ ١٤٠,٣٪

٣ - الرقم القياسي التجميعي المرجح للأسعار (باشي)

$= \frac{مجـ ع_{1} ك_{1}}{مجـ ع_{0} ك_{1}} \times ١٠٠$

$= \frac{١١٩٣٠٥٠}{٨٥٣٠٠٠} \times ١٠٠$

$=$ ١٣٩,٦٪

ونلاحظ أن الأرقام القياسية أرقام (٢) ، (٣) ، (٤) السابقة أن قيمها تختلف عن بعضها البعض، أى أن الأرقام القياسية التجميعية البسيطة تختلف عن الأرقام القياسية التجميعية المرجحة.

كما يلاحظ من الرقمين القياسين (٣، ٤) السابقين أن قيمتهما مختلفتين وإن كان الفرق بينهما بسيط [*]، وبمعنى آخر أن الرقم القياسى التجميعى المرجح بكميات سنة الأساس (لاسبير) أكبر من الرقم القياسى التجميعى المرجح لباشى بالنسبة لحالة واحدة.

والسؤال هنا إيهما يفضل الرقم القياسى للاسبير أم الرقم القياسى لباشى؟ يرى البعض للإجابة الصحيحة أنه ليس هناك سبباً لتفضيل أى منهما على الأخر حيث أن كلاهما له خصائصه[1] ومآخذه ، لذا يفضل استخدام رقم لاسبير فى بعض الحالات فى حين يفضل استخدام رقم باشى فى حالات أخرى ، ومن هذا المنطلق فتح الباب لاجتهادات الاحصائيين لأخذهم بكلا الترجيحين أى بالكميات فى نقطتى الأساس والمقارنة ، فقد قام كلاً من مارشال وإدجوارث ، وفيشر بهذه المحاولات وصولاً إلى الرقمين القياسيين التاليين :

(*) وبالطبع ممكن أن يكبر هذا الفرق بزيادةكل من عدد السلع الداخلة فى تركيب الرقم من ناحية ، أو إذا كان الاختلاف بين كميات سنة الأساس وكميات سنة المقارنة أكبر مما هو عليه فى الحالة السابقة من ناحية أخرى .

(١) نظراً لأن الترجيح فى رقم لاسبير يتم بكميات سنة الأساس حتى بالنسبة لسنة المقارنة ، بالرغم من أنه قد يحدث أن ترتفع أسعار بعض السلع بشكل كبير بما يحد من الكمية المستهلكة من السلعة من ناحية أو تحول الاستهلاك إلى سلع بديلة أقل سعراً ، فإذا حدث ما سبق فيتوقع أن يكون التطرف فى رقم لاسبير بالزيادة فى حين يتوقع أن يكون الحال على عكس ما سبق عند استخدام باشى - أى الترجيح بكميات نقطة المقارنة - فسيكون التطرف بالنقصان .

الرقم القياسي لمارشال وادجوارث :

وقد قام هذا الرقم على أساس ترجيح الأسعار بالوسط الحسابي أو الوسط الهندسي بكميتين نقطة الأساس ونقطة المقارنة وفقاً لما يلي :

(جـ) الرقم القياسي لمارشال وإدجوارث للأسعار (كوسط حسابي) :

$$= \frac{\text{مجـ } \text{ع}_{١} (\text{ك}_{٠} + \text{ك}_{١})}{\text{مجـ } \text{ع}_{٠} (\text{ك}_{٠} + \text{ك}_{١})} \times ١٠٠ \ \ldots \ (٥)$$

أو بصورة أخرى

$$= \frac{\text{مجـ } (\text{ع}_{١}\text{ك}_{٠} + \text{ع}_{١}\text{ك}_{١})}{\text{مجـ } (\text{ع}_{٠}\text{ك}_{٠} + \text{ع}_{٠}\text{ك}_{١})} \times ١٠٠ \ \ldots \ (٦)$$

(د) الرقم القياسي لمارشال وإدجوارث للأسعار (كوسط هندسي) :

$$= \frac{\text{مجـ } \text{ع}_{١} \sqrt{\text{ك}_{٠}\text{ك}_{١}}}{\text{مجـ } \text{ع}_{٠} \sqrt{\text{ك}_{٠}\text{ك}_{١}}} \times ١٠٠ \ \ldots\ldots\ldots \ (٧)$$

وبالطبع الصورة الأولى لمارشال (جـ) أسهل في الحساب من الصورة الثانية لمارشال (د).

(هـ) الرقم القياسى للأسعار لفيشر (الرقم القياسى الأمثل):

(Ideal Index number)

وهذا الرقم يعتمد فى تركيبه على كل من رقمى لاسبير وباشى للأسعار السابقين ، وهو بذلك يكون قد قلل من المآخذ التى كانت تثير جدلاً بين أفضلية رقم لاسبير على رقم باشى أو بمعنى آخر فإنه يجمع بين نوعى الترجيحات التى يستعملها كلا من لأسبير وباشى، وبذلك يكون غدا الرقم أكثر إعتدلاً وأقل تحيزاً من الرقم القياسى للأسبير (تحيز لأعلى) والرقم القياسى لباشى (تحيز إلى أسفل) (*).

$$\text{الرقيم القياسى للأسعار لفيشر} = \sqrt{\text{لاسبير} \times \text{باشى}} \times ١٠٠$$

$$= \sqrt{\frac{\text{مجـ } ع_{١} ك_{٠}}{\text{مجـ } ع_{٠} ك_{٠}} \times \frac{\text{مجـ } ع_{١} ك_{١}}{\text{مجـ } ع_{٠} ك_{١}}} \times ١٠٠ \quad (٨)$$

مثـال (٤) :

إحسب كلاً من رقمى مارشال وإدجوارث للأسعار من بيانات المثال رقم (٢) السابق

(*) لذا يطلق عليه الرقم القياسى الأمثل بالأضافة إلى أسباب أخرى سترد فيما بعد.

الحل :

جدول رقم (٤)

البيان	الأسعار		الكميات		(ك٠+ك١)	$\sqrt{ك_0 ك_1}$	ع١ (ك٠+ك١)	ع٠ (ك٠+ك١)	ع١ $\sqrt{ك_0 \times ك_1}$	ع٠ $\sqrt{ك_0 \times ك_1}$
	ع٠	ع١	ك٠	ك١						
السلعة (١)	٢	٥	٧٣٠٠	٨٠٠٠	١٥٣٠٠	٧٦٤١,٩٩	٧٦٥٠٠	٣٠٦٠٠	٣٨٢٠٩,٩٥	١٥٢٨٣,٩٨
السلعة (٢)	١٠٠	١٦٠	٧٣٠	٩٠٠	١٦٣٠	٨١٠,٥٦	٢٦٠٨٠٠	١٦٣٠٠٠	١٢٩٦٨٩,٦	٨١٠٥٦
السلعة (٣)	١٥٠٠	٢٠٠٠	٣٦٥	٤٨٠	٨٤٥	٤١٨,٥٧	١٦٩٠٠٠٠	١٢٦٧٥٠٠	٨٣٧١٤٠	٦٢٧٨٥٥
السلعة (٤)	٦٠	٨٧	١٢٠	١٥٠	٢٧٠	١٣٤,١٦	٢٣٤٩٠	١٦٢٠٠	١١٦٧١,٩٢	٨٠٤٩,٦
السلعة (٥)	٣٠٠٠	٦٠٠٠	٤	٦	١٠	٤,٩	٦٠٠٠٠	٣٠٠٠٠	٢٩٤٠٠	١٤٧٠٠
المجموع	٤٦٦٢	٨٢٥٢	٨٥١٩	٩٥٣٦			٢١١٠٧٩٠	١٥٠٧٣٠٠	١٠٤٦١١١,٤٧	٧٤٦٩٤٤,٥٨

رقم مارشال إدجوارث للأسعار (كوسط حسابى) :

$$= \frac{٢١١٠٧٩٠}{١٥٠٧٣٠٠} \times ١٠٠$$

$$= ١٤٠,٠٤\%$$

رقم مارشال إدجوارث للأسعار (كوسط هندسى)

$$= \frac{١٠٤٦١١١,٤٧}{٧٤٦٩٤٤,٥٨} \times ١٠٠$$

$$= ١٤٠,٠٥\% .$$

مثـــال (٥) :

من بيانات المثال رقم (٢) إحسب الرقم القياسى للأسعار لفيشر.

الحـل :

من بيانات المثال رقم (٤) السابق يمكن الوصول إلى عناصر تحديد الرقم القياسى للأسعار لفيشر.

$$= \sqrt{\frac{٩١٧٧٤٠}{٦٥٤٣٠٠} \times \frac{١١٨٣٠٥٠}{٨٥٣٠٠٠}} \times ١٠٠$$

$$= \sqrt{١,٤٠٢٦ \times ١,٣٩٨٧} \times ١٠٠$$

$$= \sqrt{١,٩٦١٨} \times ١٠٠$$

$$= ١,٤٠٠٦ \times ١٠٠$$

$$= ١٤٠,٠٦\%$$

وتدل النتيجة السابقة على أن قيمة السلع الداخلة فى تركيب هذا الرقم القياسى تزيد قيمتها بنسبة ٤٠,٠٦ ٪ بأسعار عام ١٩٩٩ عن قيمة نفس السلع بأسعار عام ١٩٩٥ .

ونلاحظ من كل ما سبق أن قيمة رقمى مارشال، وفيشر للأسعار تقع بين قيمة رقمى باشى ولاسبير للأسعار من ناحية، كما أن رقمى مارشال وأدجوارث وفيشر دائماً قريبين فى قيمتهما من ناحية أخرى.

ثالثاً : الأرقام القياسية التجميعية البسيطة والمرجحة للكميات (*):

بنفس الطرق السابقة لحساب الأرقام القياسية البسيطة أو المرجحة للأسعار يمكن حساب أرقام قياسية للكميات مع ملاحظة أنه بالنسبة للأرقام القياسية المرجحة تؤخذ الأسعار أو القيم سواء أسعار وقيم نقاط الأساس أو أسعار قيم نقاط المقارنة أو كليهما على حسب نوع الرقم القياسى المستخدم كأساس للترجيح كما يلى :

(أ) منسوب الكمية Quntity relutive لأى سلعة .

$$= \frac{ك_{١}}{ك_{٠}} \times ١٠٠$$

(*) إن إستخدام الصيغ التجميعية للكميات، يصعب إستخدامها إن إختلفت الوحدات القياسية للسلع المختلفة التى تدخل فى تركيب الرقم القياسى، فليس من المعقول أن نجمع رغيف خبز على لتر لبن على كيلو لحم على متر مكعب من الغاز الطبيعى على تذكرة طائرة ، لكن سيكون ما سبق ممكناً وصحيحاً فى حالة ما إذا كانت السلع الداخلة فى تركيب الرقم القياسى من وحدات قياسية من نوعية واحدة ولكن لها أكثر من وجه كأن يكون كيلو جرام من اللحوم أو البطاطس أو الجبنة أو التفاح.

(ب) الرقم القياسى التجميعى البسيط للكميات :

$$= \frac{\text{مجـ ك}_{1}}{\text{مجـ ك}_{.}} \times ١٠٠ \quad .. \quad .. \quad ... \quad .. \quad .. \qquad (٩)$$

(حـ) رقم لاسبير للكميات : (وفيه يتم الترجيح بأسعار نقطة الأساس) .

$$\frac{\text{مجـ ك}_{1}\ \text{ع}_{.}}{\text{مجـ ك}_{.}\ \text{ع}_{.}} \times ١٠٠ \quad .. \quad .. \quad .. \qquad (١٠)$$

(د) رقم باشى للكميات (وفيه يتم الترجيح بأسعار نقطة المقارنة) .

$$= \frac{\text{مجـ ك}_{1}\ \text{ع}_{1}}{\text{مجـ ك}_{.}\ \text{ع}_{1}} \times ١٠٠ \quad .. \quad .. \quad .. \quad .. \qquad (١١)$$

(هـ) الرقم القياسى للكميات (لمارشال وإدجوارث)

١ – رقم مارشال وإدجوارث للكميات (كوسط حسابى)

$$= \frac{\text{مجـ ك}_{1}\ (\text{ع}_{.} + \text{ع}_{1})}{\text{مجـ ك}_{.}\ (\text{ع}_{.} + \text{ع}_{1})} \times ١٠٠ \quad .. \quad .. \qquad (١٢)$$

أو بصورة أخرى $= \frac{\text{مجـ }(\text{ك}_{1}\ \text{ع}_{.} + \text{ك}_{1}\ \text{ع}_{1})}{\text{مجـ }(\text{ك}_{.}\ \text{ع}_{.} + \text{ك}_{.}\ \text{ع}_{1})} \times ١٠٠$

٢ – رقم مارشال وإدجوارث للكميات (كوسط هندسى)

$$= \frac{\text{مجـ } ك_{١} \sqrt{ع_{.} \, ع_{١}}}{\text{مجـ } ك_{.} \sqrt{ع_{.} \, ع_{١}}} \times ١٠٠ \quad .. \; .. \; .. \; .. \quad (١٣)$$

(و) الرقم القياسى للكميات لفيشر :

$$= \sqrt{\frac{\text{مجـ } ك_{١} \, ع_{.}}{\text{مجـ } ك_{.} \, ع_{.}} \times \frac{\text{مجـ } ك_{١} \, ع_{١}}{\text{مجـ } ك_{.} \, ع_{١}}} \times ١٠٠ \quad (١٤)$$

من الممكن إستخدام متوسط أسعار عدة سنوات كأوزان ثابتة ، فمن الممكن حساب (الوسط الحسابى أو الوسط الهندسى) لأسعار عدة نقاط زمنية للحصول على سعر ثابت وليكن ($\bar{ع}$) تستخدم للترجيح فى الحالة السابقة وعليه تكون معادلة الرقم القياسى للكميات على النحو السابق.

$$= \frac{\text{مجـ } ك_{١} \, \acute{ع}}{\text{مجـ } ك_{١} \, \acute{ع}} \times ١٠٠$$

مثـــال (٦) :

إحسـب الأرقـام القياسية للكميـات للسـلع التاليـة:

الكميـة بالكيلو جرام والسعر بالجنيه للكيلو جرام .

جدول رقم (٥)

السلع / السنة	(أ)		ب		حـ		د	
	الكمية	السعر	الكمية	السعر	الكمية	السعر	الكمية	السعر
عـام١٩٩٥	٥	١٥	١٨	٢	٣٠	١٠	١٠٠	٤
عـام١٩٩٨	٨	٢٠	٢٥	٦	٢٠	٧	٧	٣

الحـــل :

أولهما : ∴ منسوب الكمية لأى سلعة = $\frac{ك_1}{ك_0}$ × ١٠٠

∴ منسوب الكمية للسلعة (أ) = $\frac{٨}{٥}$ × ١٠٠ = ١٦٠ ٪

∴ منسوب الكمية للسلعة (ب) = $\frac{٢٥}{١٨}$ × ١٠٠ = ١٣٨,٩ ٪

∴ منسوب الكمية للسلعة (حـ) = $\frac{٢٠}{٣٠}$ × ١٠٠ = ٦٦,٧ ٪

∴ منسوب الكمية للسلعة (د) = $\frac{٨٨}{١٠٠}$ × ١٠٠ = ٨٨ ٪

ويفسر الأخير بأن كمية إستهلاك هذه السلعة قد انخفضت عام ٩٨ عنه فى عام ١٩٩٥ بنسبة ١٢ ٪.

ثانيهما : الأرقام القياسية التجميعية البسيطة .

ولتسهيل حسابات الأرقام السابقة يفضل أن يتم إعداد الجدول التالى:

جـــدول رقـم (٦)

البيان / السلع	الكميات		الأسعار		ك. + ع.	ك. + ع١	ك١ + ع.	ك١ ع١	ع. + ع١	√(ع. ع١)	ك١ (ع. + ع١)	ك. (ع. + ع١)	ك١ √(ع. × ع١)	ك. √(ع. × ع١)
	ك.	ك١	ع.	ع١										
أ	٥	٨	١٥	٢٠	٧٥	١٠٠	١٢٠	١٦٠	٣٥	١٧,٣٢	٢٨٠	١٧٥	١٣٨,٥٦	٨٦,٦
ب	١٨	٢٥	٢	٦	٣٦	١٠٨	٥٠	١٥٠	٨	٢,٨٣	٢٠٠	١٤٤	٧٠,٧٥	٥٠,٩٤
حـ	٣٠	٢٠	١٠	٧	٣٠٠	٢١٠	٢٠٠	١٤٠	١٧	٨,٣٧	٣٤٠	٥١٠	١٦٧,٤	٢٥١,١
د	١٠٠	٨٨	٤	٣	٤٠٠	٣٠٠	٣٥٢	٢٦٤	١٢	٣,٤٦	١٠٥٦	١٢٠٠	٣٠٤,٤٨	٢٤٦
المجموع	١٥٣	١٤١	٣١	٣٦	٧١١	٧١٨	٧٢٢	٧١٤	-	-	١٨٧٦	٢٠٢٩	٦٨١,١٩	٧٣٤,٦٤

باستخدام قوانين الأرقام القياسية للكميات وبيانات الجدول السابق :

١ - رقم لاسبير للكميات = $\frac{\text{مجـ } ك_١ \, ع_٠}{\text{مجـ } ك_٠ \, ع_٠} \times ١٠٠$

$= \frac{٧٢٢}{٧١١} \times ١٠٠ = ١٠١,٥\%$

٢ - رقم باشى للكميات = $\frac{\text{مجـ } ك_١ \, ع_١}{\text{مجـ } ك_٠ \, ع_١} \times ١٠٠$

$= \frac{٧١٤}{٧١٨} \times ١٠٠ \; ٩٩,٤\%$

٣ - رقم مارشال وإدجوارث للكميات (وسط حسابى)

$= \frac{\text{مجـ } ك_١ \, (ع_٠ + ع_١)}{\text{مجـ } ك_٠ \, (ع_٠ + ع_١)} \times ١٠٠$

$= \frac{١٨٧٦}{٢٠٢٩} \times ١٠٠ = ٩٢,٥\%$

٤ - رقم مارشال وإدجوارث للكميات (وسط هندسى)

$= \frac{\text{مجـ } ك_١ \sqrt{ع_٠ \, ع_١}}{\text{مجـ } ك_٠ \sqrt{ع_٠ \, ع_١}} \times ١٠٠$

$$= \frac{٦٨١,١٩}{٧٣٤,٦٤} \times ١٠٠ = ٩٢,٧\%$$

٥ – رقم فيشر للكميات $= \sqrt{\frac{\text{مجـ ك}_{١}\text{ع}_{٠}}{\text{مجـ ك}_{٠}\text{ع}_{٠}} \times \frac{\text{مجـ ك}_{١}\text{ع}_{١}}{\text{مجـ ك}_{٠}\text{ع}_{١}}} \times ١٠٠$

$$= \sqrt{\frac{٧٢٢}{٧١١} \times \frac{٧١٤}{٧١٨}} \times ١٠٠$$

$$= \sqrt{١,٠١٥ \times ٠,٩٩٤٤} \times ١٠٠$$

$$= \sqrt{١,٠٠٩٣١٦} \times ١٠٠$$

$$= ١,٠٠٥ \times ١٠٠$$

$$= ١٠٠,٥\%$$

وتدل النتيجة الأخيرة على أنه إذا ثبتت الأسعار كما كانت عليه عام ١٩٩٨ فإن الكميات تزيد بمقدار ٠,٥٪ فيما بين الفترة من ١٩٩٥ إلى ١٩٩٨ .

مثـــال (٧) :

فيما يلى كميات المبيعات بالجملة من بعض المشغولات الذهبية (عيار ٢١) بسوق الجملة فى بعض المدن ببعض الدول المختلفة عام ١٩٩٩ (بالمليون جرام) ومتوسط الجرام منها مقوماً بالدولار خلال نفس العام.

جـــدول رقـــم (٧)

البيــــــان	سعر الجرام بالدولار ١٩٩٩		كميات المبيعات بالجملة (بالمليون جرام) ١٩٩٩	
	الرياض	القاهرة	الرياض	القاهرة
مشغولات تقليدية	١١	١٠	١٥٠	١٠٠
مشغولات غير تقليدية	١٥	٢٠	١٠٠	٥٠
المجـــمـــوع	٢٦	٣٠	٢٥٠	١٥٠

إحسب الأرقام القياسية المختلفة للكميات على أساس أن :

(أ) الرياض هى مدينة الأساس.

(ب) القاهرة هى مدينة الأساس.

الحـــل :

(أ) الرياض هى مدينة الأساس :

جـــدول رقم (٨)

البيـــــان	$ع_٠$	$ع_١$	$ك_٠$	$ك_١$	$ك_٠ ع_٠$	$ك_٠ ع_٠$	$ك_٠ ع_١$	$ك_١ ع_١$
مشغولات تقليدية	١١	١٠	١٥٠	١٠٠	١٦٥٠	١١٠٠	٠٥٠٠	١٠٠
مشغولات غير تقليدية	١٥	٢٠	١٠٠	٥٠	١٥٠٠	٧٥٠	٢٠٠٠	١٠٠٠
المجـــمـــوع	٢٦	٣٠	٢٥٠	١٥٠	٣١٥٠	١٨٥٠	٢٥٠٠	٢٠٠٠

١ - الرقم القياسى التجميعى البسيط للكميات :

$$= \frac{\text{مجـ ك}_1}{\text{مجـ ك}_0} \times ١٠٠$$

$$= \frac{١٥٠}{٢٥٠} \times ١٠٠ = ٦٠\%$$

٢ - الرقم القياسى التجميعى المرجح بأسعار الأساس (لاسبير)

$$= \frac{\text{مجـ ك}_1 \text{ع}_0}{\text{مجـ ك}_0 \text{ع}_0} \times ١٠٠$$

$$= \frac{١٨٥٠}{٣١٥٠} \times ١٠٠ = ٥٨,٧\%$$

٣ - الرقم القياسى التجميعى المرجح بأسعار المقارنة (باشى)

$$= \frac{\text{مجـ ك}_1 \text{ع}_1}{\text{مجـ ك}_0 \text{ع}_1} \times ١٠٠$$

$$= \frac{٢٠٠٠}{٣٥٠٠} \times ١٠٠ = ٥٧,١\%$$

٤ - رقم فيشر للكميات $= \sqrt{\frac{\text{مجـ ك}_1 \text{ع}_0}{\text{مجـ ك}_0 \text{ع}_0} \times \frac{\text{مجـ ك}_1 \text{ع}_1}{\text{مجـ ك}_0 \text{ع}_1}} \times ١٠٠$

$$= \sqrt{\frac{١٨٥٠}{٣١٥٠} \times \frac{٢٠٠٠}{٣٥٠٠}} \times ١٠٠$$

$$= \frac{٣٧٠٠٠٠٠}{١١٠٢٥٠٠٠} \times ١٠٠ = ٥٧,٩\%$$

(ب) إذا كانت القاهرة هى مدينـة الأسـاس :

جـــدول رقم (٩)

البيـــــان	$ع_{٠}$	$ع_{١}$	$ك_{٠}$	$ك_{١}$	$ك_{٠}ع_{٠}$	$ك_{١}ع_{١}$	$ك_{١}ع_{١}$	$ك_{٠}ع_{١}$
مشـغولات تقليديـة	١٠	١١	١٥٠	١٥٠	١٠٠٠	١٥٠٠	١٦٥٠	١١٠٠
مشغولات غير تقليدية	٢٠	١٥	٥٠	٥٠	١٠٠٠	٢٠٠٠	١٥٠٠	٧٥٠
المجمـــوع	٣٠	٢٦	١٥٠	٢٥٠	٢٠٠٠	٣٥٠٠	٣١٥٠	١٨٥٠

١ – الرقم القياسى التجميعى البسيط للكميات :

$$= \frac{مجـ ك_{١}}{مجـ ك_{٠}} \times ١٠٠$$

$$= \frac{٢٥٠}{١٥٠} \times ١٠٠$$

$$= ١٦٧\%$$

٢ - الرقم القياسي التجميعي للكميات المرجح للاسبير :

$$= \frac{\text{مجـ } ك_١ ع_٠}{\text{مجـ } ك_٠ ع_٠} \times ١٠٠$$

$$= \frac{٣٥٠٠}{٢٠٠٠} \times ١٠٠$$

$$= ١٧٥\%$$

٣ - الرقم القياسى التجميعى للكميات المرجح (باشى)

$$= \frac{\text{مجـ } ك_١ ع_١}{\text{مجـ } ك_٠ ع_١} \times ١٠٠$$

$$= \frac{٣١٥٠}{١٨٥٠} \times ١٠٠ = ١٧٠,٣\%$$

٤ - رقم فيشر للكميات

$$= \sqrt{\frac{٣٥٠٠}{٢٠٠٠} \times \frac{٣١٥٠}{١٨٥٠}} \times ١٠٠$$

$$= \sqrt{\frac{١١٠٢٥٠٠٠}{٣٧٠٠٠٠٠}} \times ١٠٠$$

$$= ١٧٢,٦\%$$

الأرقام القياسـية بالمناسيب (*)

تغلبنا فى الجزء السابق على أهم عيوب الأرقام القياسية التجميعية البسيطة من ناحية إختلاف الأهميات النسبية لكل سلعة تدخل فى تركيب الرقم القياسى – حيث تم معاملة جميع السلع بأهميات نسبية متساوية – وذلك بإستخدام أسلوب الأوزان أو الترجيحات فقد أتخذت الكميات كمعيار للترجيح عند تركيب الأرقام القياسية التجميعية المرجحة للأسعار فى حين أتخذت الأسعار كمعيار للترجيح عند تركيب الأرقام القياسية التجميعية المرجحة بالكميات ، ومما لا شك فيه أن الأرقام القياسية الترجيحية السابقة لم تتغلب على المشكلة أو العيب الآخر (**) وهو إختلاف الوحدات القياسية المستعملة فى تسعير السلع المختلفة الداخلة فى تركيب الرقم القياسى، أو بمعنى آخر إختلاف الوحدات التى يعبر عنها السعر بالنسبة للسلع الداخلة فى تركيب الرقم القياسى، وهو ما سوف نأخذه فى الاعتبار عند دراسة الأرقام القياسية بالمناسيب (***) ذلك أن منسوب السعر (The Price relative) أو منسوب الكميـة (Quntity relative) لأى متغير عبارة عن نسب ليس لها تمييز ، بجانب التعرف على التغير النسبى فى سعر أو كمية سلعة على حدة من ناحية ثانية، كما سيصبح من اليسير تركيب رقم قياسى تجميعى بسيط للكميات من ناحية ثالثة إذا ما إختلفت وحدات

(*) أحياناً ما يطلق عليها الأرقام القياسية المتوسطة.

(**) إرجع إلى العيب رقم (٣) المشار إليه سابقاً .

(***) المنسوب هو أبسط صيغة للأرقام القياسية للأسعار أو للكميات، وعلى سبيل المثال فإن منسوب السعر يهدف إلى أظهار سعر سلعة محددة فى فترة المقارنة بالنسبة لفترة الأساس.

القياس الداخلة فى تركيب الرقم القياسى - بعد ما كان أمراً مستحيل تركيبه بالصيغة التجميعية البسيطة نظراً لأختلاف وحدات القياس كما سبق أن أشرنا -.

وهناك أكثر من رقم قياسى بالمناسيب يختلف كل منها عن الآخر بإختلاف نوع المتوسط المستخدم، هل هو وسطاً حسابياً أو وسطاً هندسياً سواء أكان رقماً بسيطاً أو مرجحاً كما يلى :

أولا : الأرقام القياسية البسيطة للمناسيب:

(أ) الوسط الحسابى لمناسيب الأسعار:

إذا كان لدينا أكثر من سلعة وليكن (ن) من السلع، ولكل سلعة سعرين أحدهما فى نقطة الأساس ($ع_٠$) والآخر فى نقطة المقارنة ($ع_١$) فإنه سيكون لدينا (ن) من المناسيب للأسعار وسنرمز للمنسوب بالرمز(م) وهى:

$$م_١ = \frac{ع_{١١}}{ع_{١٠}} \times ١٠٠ \text{ ، } م_٢ = \frac{ع_{٢١}}{ع_{٢٠}} \times ١٠٠ \text{ ، } م_٣ = \frac{ع_{٣١}}{ع_{٣٠}} \times ١٠٠ \text{ ، } \ldots م_ن \text{ ، } \frac{ع_{ن١}}{ع_{ن٠}} \times ١٠٠$$

وبفرض أن عدد السلع الداخلة فى تركيب الرقم = ن من السلع

$$= \frac{\text{مجـ} \left(\frac{ع_١}{ع_٠}\right) \times ١٠٠}{ن} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (١٥/أ)$$

أو بصيغة أخرى

$$= \frac{م_1 + م_2 + م_3 + \ldots + م_ن}{ن} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (١٥/ب)$$

أيضاً إذا كان عدد السلع الداخلة فى تركيب الرقم القياسى = ن من السلع ولكل سلعة كميتين أحدهما فى نقطة الأساس ($ك_٠$) والأخرى فى نقطة المقارنة ($ك_١$) فإنه سيكون لدينا (ن) من المناسيب للكميات وسنرمز له بالرمز (هـ) وهى :

$$هـ_1 = \frac{ك_{11}}{ك_{10}} \times 100 ، هـ_2 = \frac{ك_{21}}{ك_{20}} \times 100 ، هـ_3 = \frac{ك_{31}}{ك_{30}} \times 100 ، \ldots ، هـ_ن = \frac{ك_{ن1}}{ك_{ن0}} \times 100$$

ويفرض أن عدد السلع الداخلة فى تركيب الرقم القياسى = ن من السلع

(ب) الوسط الحسابى لمناسيب الكميات:

$$= \frac{مجـ \left(\frac{ك_1}{ك_0} \right) \times 100}{ن} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (١٦/أ)$$

أو بصيغة أخرى

$$= \frac{هـ_1 + هـ_2 + هـ_3 + \ldots + هـ_ن}{ن} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (١٦/ب)$$

مثـال (٨) :

من المثال رقم (٢) السابق إحسب كلاً من الأرقام القياسية البسيطة التالية للمناسيب:

أولاً : الوسط الحسابى لمناسيب أسعار.

ثانياً : الوسط الحسابى لمناسيب الكميات

الحـل :

أولاً : مناسـيب الأسـعار :

$$م_{١} = \frac{٥}{٢} \times ١٠٠ = ٢٥٠\% \quad ، \quad م_{٢} = \frac{١٦٠}{١٠٠} \times ١٠٠ = ١٦٠\%$$

$$م_{٣} = \frac{٢٠٠٠}{١٥٠٠} \times ١٠٠ = ١٣٣٣\% \quad ، \quad م_{٤} = \frac{٨٧}{٦٠} \times ١٠٠ = ١٤٥\%$$

$$م_{٥} = \frac{٦٠٠٠}{٣٠٠٠} \times ١٠٠ = ٢٠٠\%$$

وعليه فإن :

الوسط الحسابى لمناسيب الأسعار

$$\frac{١٠٠ \times \left(\frac{٦٠٠٠}{٣٠٠٠} + \frac{٨٧}{٦٠} + \frac{٢٠٠٠}{١٥٠٠} + \frac{١٦٠}{١٠٠} + \frac{٥}{٢} \right)}{٥}$$

$$= \frac{١٠٠ \times ٨,٨٨٣}{٥}$$

$$= \frac{٨٨٨,٣}{٥} = ١٧٧,٦٦\%$$

أو

$$= \frac{\%٢٠٠ + ١٤٥ + \%١٣٣,٣ + \%١٦٠ + \%٢٥٠}{٥}$$

$$= \frac{\%٨٨٨,٣}{٥} = \%١٧٧,٦٦$$

ثانياً : مناسيب الكميات:

$$ه_1 = \frac{٨٠٠٠}{٧٣٠٠} \times ١٠٠ = ١٠٩,٥٩\% \text{ ، } ه_2 = \frac{٩٠٠}{٧٣٠} \times ١٠٠ = ١٢٣٢٩\%$$

$$ه_3 = \frac{٤٨٠}{٣٦٥} \times ١٠٠ = ١٣١٥١\% \text{ ، } ه_4 = \frac{١٥٠}{١٢٠} \times ١٠٠ = ١٢٥\%$$

$$ه_5 = \frac{٦}{٤} \times ١٠٠ = ١٥٠\%$$

وعليه فإن :

الوسط الحسابى لمناسيب الكميات

$$= \frac{(١,٠٩٥٩ + ١٢٣٢٩ + ١,٣١٥١ + ١,٢٥ + ١,٥) \times ١٠٠}{٥}$$

$$= \frac{٦,٣٩٣٩}{٥} \times ١٠٠ = ١٢٧,٨٨\%$$

$$\text{أو } = \frac{١٠٩,٥٩\% + ١٢٣,٢٩\% + ١٣١,٥١\% + ١٢٥\% + ١٥٠\%}{٥}$$

$$= \frac{٦٣٩,٣٩\%}{٥} = ١٢٧,٨٨\%$$

ثانيا : الرقم القياسى البسيط للمناسيب (كوسط هندسى) :

ويفضل الوسط الهندسى للمناسيب عن الوسط الحسابى للمناسيب وذلك لدقة الأول عن الثانى حيث يعانى الأخير قصور دقة الحساب لاعتماد حساباته على مناسيب (أى لنسب) وليس على أرقام مجردة للأسعار أو الكميات (*).

(أ) الوسط الهندسى البسيط لمناسيب الأسعار :

$$= \sqrt[\text{ن}]{\prod_{1}^{\text{ن}} \left(\frac{\text{ع}_1}{\text{ع}_0}\right)} \times ١٠٠ \quad .. \quad .. \quad (١٧/أ)$$

أو

$$= \sqrt[\text{ن}]{\text{م}_1 \times \text{م}_2 \times \text{م}_3 \times ... \times \text{م}_{\text{ن}}} \quad .. \quad .. \quad .. \quad .. \quad .. \quad (١٧/ب)$$

$$\text{حيث م} = \left(\frac{\text{ع}_1}{\text{ع}_0} \times ١٠٠\right)$$

(ب) الوسط الهندسى البسيط لمناسيب الكميات :

$$= \sqrt[\text{ن}]{\prod_{1}^{\text{ن}} \left(\frac{\text{ك}_1}{\text{ك}_0}\right)} \times ١٠٠ \quad .. \quad .. \quad (١٨/أ)$$

(*) بفرض نقص منسوب سلعة إلى الثلث، فى حين أرتفع منسوب سلعة أخرى إلى ثلاث أمثال فمنطقياً أن المتوسط لا يتغير للمنسوبين السابقين، لكن لو حسب الوسط الحسابى للحالة السابقة نجد أنه = $\frac{٠,٣٣٣ + ٣}{٢٠} \times ١٠٠ = ١٦٦,٦٥$ ٪ أى أن الوسط الحسابى للمناسيب قد تغير بما قيمته ٦٦,٦٥ ٪ بعكس الوسط الهندسى للسلعتين نفسها الذى لا يتغير حيث أن :

$٠,٣٣٣ \times ٣ \times ١٠٠ = ١٠٠$ ٪.

أو

$$= \sqrt[ن]{\pi_{1}^{ن} هـ_{1} \times هـ_{2} \times هـ_{3} \times \ldots \times هـ_{ن}} \quad \ldots \quad (١٨/ب)$$

حيث $هـ = (\frac{ك_{1}}{ك_{1}} \times ١٠٠)$

كما أن الرمز (π) يشير إلى حاصل ضرب.

مثـــال (٩) :

من المثال رقم (٢) السابق أحسب كلاً من الأرقام القياسية البسيطة التالية للمناسيب.

أولاً : الوسط الهندسى البسيط لمناسيب الأسعار .

ثانياً : الوسط الهندسى البسيط لمناسيب الكميات.

الحـــل :

لتسهيل العمليات الحسابية فإنه يفضل إستخدام أسلوب اللوغاريتمات عند إيجاد الوسط الهندسى البسيط للمناسيب كما يلى :

جـــدول رقـم (١٠)

البيـــان	الأسعار ع٠	ع١	الكميات ك٠	ك١	منسوب السعر (ع١ / ع٠)	لو (ع١ / ع٠)	منسوب الكمية (ك١ / ك٠)	لو (ك١ / ك٠)
	قرش	قرش	وحدة	وحدة				
خـبـز	٢	٥	٧٣٠٠	٨٠٠٠	٢,٥	٠,٣٩٧٩	١,٠٩٥٩	٠,٠٣٩٨
لـبـن	١٠٠	١٦٠	٧٣٠	٩٠٠	١,٦	٠,٢٠٤١	١,٢٣٢٩	٠,٠٩٠٩
لحـم	١٥٠٠	٢٠٠٠	٣٦٥	٤٨٠	١,٣٣٣	٠,١٢٤٨	١,٣١٥١	٠,١١٩٠
غاز طبيعى	٦٠	٨٧	١٢٠	١٥٠	١,٤٥	٠,١٦١٤	١,٢٥٠٠	٠,٠٩٦٩
تذكرة طيران	٣٠٠٠	٦٠٠٠	٤	٦	٢,-	٠,٣٠١٠	١,٥٠٠٠	٠,١٧٦١
المجمـــوع					٨,٨٨٣	١,١٨٩٢	٦,٣٩٣٩	٠,٥٢٢٧

ومنه فإن :

$$\text{(أ) لو (الوسط الهندسى لمناسيب الأسعار} = \frac{\text{مجـ لو}\left(\frac{ع_1}{ع_0}\right)}{ن}$$

ومن الجـدول السـابق

$$\text{لو الرقم} = \frac{1,1892}{5} = 0,23784$$

وبالبحث فى جدول الأعـداد المقـابلة للوغارتيمـات عن العدد المقابل إلى لو (٠,٢٣٧٨٤) سنجـده = ١,٧٢٩ وبالضـرب فى ١٠٠ فـإن الوسط الهندسى لمناسـيب الأسـعار لمجـموعـة السلع الداخلة فى تركـيب الرقم القياسى:

= ١,٧٩ × ١٠٠ = ١٧٢,٩ ٪ (*)

$$\text{(ب) لو (الوسط الهندسى لمناسيب الكميات)} = \frac{\text{مجـ لو}\left(\frac{ك_1}{ك_0}\right)}{ن}$$

ومن الجدول السابق

$$\text{لو الرقم} = \frac{0,5227}{5} = 0,10454$$

(*) لاحظ أن الوسط الحسابى لمناسيب الأسـعـار لنفس السلع = ١٧٧,٦٦ ٪ أى أن الوسط الحسابى لمناسيب الأسعار دائماً أكبر من الوسط الهندسى لمناسيب الأسعار لنفس الحالة ١٧٢,٩ ٪.

وبالبحث فى جدول الإعداد المقابلة للوغارتيمات عن العدد المقابل ك لو (٠,١٠٤٥٤) سنجده = (١,٢٧٢) وبالضرب فى ١٠٠ فإن الوسط الهندسى البسيط لمناسيب الكميات لمجموعة السلع الداخلة فى تركيب الرقم القياسى.

= ١,٢٧٢ × ١٠٠

= ١٢٧,٢ ٪

ثانياً : الأرقام القياسية المرجحة للمناسيب :

إن الأرقام القياسية السابقة فى (أولاً) كوسط حسابى بسيط للمناسيب أو كوسط هندسى بسيط للمناسيب تغلبت على مشكلة إختلاف وحدات القياس بين السلع الداخلة فى تركيب أى رقم قياسى منها سواء بالنسبة للأسعار أو بالنسبة للكميات، ويعيبهما أنهما عاملاً السلع الداخلة فى تركيبهما بنفس الأهمية النسبية لكل سلعة دون تفرقة للأهمية النسبية لكل سلعة عن الأخرى، وعليه فالأرقام القياسية التى حصلنا عليها بالمنتوسطات البسيطة السابقة لا تصور على حقيقتها ، وبمعنى آخر فإن نتائجهما مضللة بعض الشىء.

لذلك يستحسن تعديل هذه المتوسطات البسيطة للمناسيب بإستخدام أوزان تتناسب مع أهمية السلع التى ترجح بها للمناسيب الخاصة بها وأفضل معيار نقيس به الأهمية النسبية للسلعة هو قيمتها، أى حاصل ضرب سعرها فى كمياتها، ولكن السؤال عندما نرجح فبأى سعر وأى كمية فقد عرفنا أن لكل سلعة سعر أساسى ($ع_٠$) وسعر مقارنة ($ع_١$) وكذلك لكل سلعة كمية أساسية ($ك_٠$) وكمية مقارنة ($ك_١$) مع ملاحظة ما يلى :

١ – إن إستخدام الكميات وحدها للترجيح فى حالة المناسيب، عمل غير منطقى، ذلك لأن المنسوب مجرد نسبة لا تمييز له ($ع_١ ÷ ع_٠$) فإذا رجحناه بالكميات فقط حصلنا فى الواقع على رقم أقرب إلى تمثيل الكميات منه إلى تمثيل الأسعار، لذا وحتى يكون الترجيح متفقاً مع المنطق والواقع العملى فإنه يجب أن يتفق مع القيمة (ع×ك)، وعليه فإن المناسيب يجب ترجيحها بإحدى الأوزان أو الترجيحات التالية :

أولاً : $ع_٠ ك_٠$ ، ثانياً : $ع_١ ك_٠$

ثالثاً : $ع_٠ ك_١$ ، رابعاً : $ع_١ ك_٠$

وللحصول على الرقم القياسى كمتوسط مرجح للمناسيب يتم ضرب

$$\frac{(\text{كل منسوب} \times \text{الوزن المناظر له})}{\text{مجموعة الأوزان}} \times ١٠٠$$

فبإستخدام الأوزان الترجيحية المشار إليها عالية فى المعادلة السابقة نحصل على الأرقام القياسية التالية (*).

(أ) بإستخدام الوزن الترجيحى ($ع_٠ ك_٠$) نحصل على :

١ – الرقم القياسى المرجح لمناسيب الأسعار :

$$= \frac{مجـ \left(\frac{ع_١}{ع_٠} \times ع_٠ ك_٠ \right)}{مجـ \left(ع_٠ ك_٠ \right)} \times ١٠٠ \quad .. \quad (١٩)$$

(*) إذا تم حساب الوسط التوافقى لمناسيب الأسعار فى هذا الرقم نحصل على الرقم القياسى لباشى للأسعار.

$$= \frac{\text{مجـ} (ع_{١} ك_{٠})}{\text{مجـ} (ع_{٠} ك_{٠})} \times ١٠٠$$

وهو نفسه الرقم المرجح للاسبير للأسعار .

٢ – الرقم القياسى المرجح لمناسيب الكميات :

$$= \frac{\text{مجـ} \left(\frac{ك_{١}}{ك_{٠}} \times ع_{٠} ك_{٠} \right)}{\text{مجـ} (ع_{٠} ع_{١})} \times ١٠٠ \quad .. \quad .. \quad (٢٠)$$

$$= \frac{\text{مجـ} (ك_{١} ع_{٠})}{\text{مجـ} (ك_{٠} ع_{٠})} \times ١٠٠$$

وهو نفسه الرقم القياسى المرجح للاسبير للكميات

(ب) بإستخدام الوزن الترجيحى ($ع_{١} ك_{١}$) نحصل على :

٣ – الرقم القياسى المرجح لمناسيب الأسعار (*)

$$= \frac{\text{مجـ} \left(\frac{ع_{١}}{ع_{٠}} \times ع_{١} ك_{١} \right)}{\text{مجـ} (ع_{١} ك_{١})} \times ١٠٠ \quad .. \quad .. \quad (٢١)$$

٤ – الرقم القياسى المرجح لمناسيب الكميات

$$= \frac{\text{مجـ} \left(\frac{ك_{١}}{ك_{٠}} \times ع_{١} ك_{١} \right)}{\text{مجـ} (ع_{١} ك_{١})} \times ١٠٠ \quad .. \quad .. \quad (٢٢)$$

(حـ) بإستخدام الوزن الترجيحى ($\text{ع}_{٠}$ $\text{ك}_{١}$) نحصل على :

٥ – الرقم القياسى المرجح لمناسيب الأسعار.

$$= \frac{\text{مجـ}\left(\frac{\text{ع}_{١}}{\text{ع}_{٠}} \times \text{ع}_{٠}\,\text{ك}_{١}\right)}{\text{مجـ}\left(\text{ع}_{٠}\,\text{ك}_{١}\right)} \times ١٠٠ \quad .. \quad .. \quad (٢٣)$$

$$= \frac{\text{مجـ}\left(\text{ع}_{١}\,\text{ك}_{١}\right)}{\text{مجـ}\left(\text{ع}_{٠}\,\text{ك}_{١}\right)} \times ١٠٠$$

وهو نفسه الرقم القياسى المرجح لباشى للأسعار

٦ – الرقم القياسى المرجح لمناسيب الكميات :

$$= \frac{\text{مجـ}\left(\frac{\text{ك}_{١}}{\text{ك}_{٠}} \times \text{ع}_{٠}\,\text{ك}_{١}\right)}{\text{مجـ}\left(\text{ع}_{٠}\,\text{ك}_{١}\right)} \times ١٠٠ \quad .. \quad .. \quad (٢٤)$$

(د) بإستخدام الوزن الترجيحى ($\text{ع}_{١}$ $\text{ك}_{٠}$) نحصل على :

٧ – الرقم القياسى المرجح لمناسيب الأسعار

$$= \frac{\text{مجـ}\left(\frac{\text{ع}_{١}}{\text{ع}_{٠}} \times \text{ع}_{١}\,\text{ك}_{٠}\right)}{\text{مجـ}\left(\text{ع}_{١}\,\text{ك}_{٠}\right)} \times ١٠٠ \quad .. \quad .. \quad (٢٥)$$

٨ – الرقم القياسى المرجح لمناسيب الكميات :

$$= \frac{\text{مجـ}\left(\frac{ك_{١}}{ك_{٠}} \times ع_{١}\, ك_{٠}\right)}{\text{مجـ}\left(ع_{١}\, ك_{٠}\right)} \times ١٠٠ \quad .. \quad .. \quad (٢٦)$$

$$= \frac{\text{مجـ}\; ك_{١}\, ع_{١}}{\text{مجـ}\; ك_{٠}\, ع_{١}} \times ١٠٠$$

وهو نفسه الرقم القياسى المرجح للكميات لباشى.

مثـــال (١٠) احسب الأرقام القيـاسيـة المرجحـة للمناسيب الممكنة للأسعار والكميات فى المثال رقم (٢) السابق.

جـــــدول رقم (١١)

البيـان	الأسـعار		الكميات		$\frac{ع_1}{ع_0}$	$\frac{ك_1}{ك_0}$	منـاسيب الأسـعار المرجحـة				منـاسيب الكميات المرجحـة			
	$ع_0$	$ع_1$	$ك_0$	$ك_1$			$(\frac{ع_1}{ع_0} \times ع_0 ك_0)$	$(\frac{ع_1}{ع_0} \times ع_0 ك_1)$	$(\frac{ع_1}{ع_0} \times ع_0 ك_1)$	$\frac{ع_1}{ع_0} \times ع_1 ك_0$	$\frac{ك_1}{ك_0} \times ع_0 ك_0$	$\frac{ك_1}{ك_0} \times ع_1 ك_1$	$\frac{ك_1}{ك_0} \times ع_0 ك_1$	$\frac{ك_1}{ك_0} \times ع_1 ك_0$
السلعة (أ)	١	٥	٧٣٠٠	٨٠٠٠	٢,٥	١,٠٩٦	٣٦٥٠٠	١٠٠٠٠٠	٤٠٠٠٠	٩١٢٥٠	١٦٠٠٢	٤٣٨٤٠	٣١٣٦٠	٤٠٠٠٤ -
السلعة (ب)	١٠٠	١٦٠	٨٣٠	٩٠٠	١,٦	١,٣٣٣	١١٦٨٠٠	٢٣٠٤٠٠	١٤٤٠٠٠	١٨٦٨٨٠	٩٠٠٠٩	١٧٧٥٥٢	١١٠٩٧٠	١١٤٤٠١٤
السلعة (جـ)	١٥٠٠	٢٠٠٠	٣٦٥	٤٨٠	١,٣٣٣	١,٣١٥	٧٢٩٨١٧,٥	١٢٧٩٦٨٠	٩٥٩٧٦٠	٩٧٣٠٩٠	٧١٩٩٦٣	١٢٦٢٤٠٠	٩٤٦٨٠٠	٩٥٩٩٥٠
السلعة (د)	٦٠	٨٧	١٢٠	١٥٠	١,٤٥	١,٢٥	١٠٤٤٠	١٨٩٢٢,٥	١٣٠٥٠	١٥١٣٨	٩٠٠٠	١٦٣١٣	١١٢٥٠	١١٣٠٥٠
السلعة (هـ)	٣٠٠٠	٦٠٠٠	٤	٦	٢,-	١,٥	٢٤٠٠٠	٧٢٠٠٠	٣٦٠٠٠	٤٨٠٠٠	١٨٠٠٠	٤٥٠٠٠	٢٧٠٠٠	٣٦٠٠٠
المجموع							٩١٧٠٥٧,٥	١٧٠١٠٠٢,٥	١١٩٢٨١٠	١٣١٤٣٥٨	٨٥٢٩٧٤	١٥٥٤١٠٥	١١٢٧٣٨٠	١١٩٣٠١٨

الأرقام القياسية لمناسيب الأسعار المرجحة (*):

١ - $$\frac{\text{مجـ}\left(\frac{ع_1}{ع_0}\times ع_0\ ك_0\right)}{\text{مجـ}\left(ع_0\ ك_0\right)}\times ١٠٠ = \frac{٩١٧٠٥٧٥}{٦٥٤٣٠٠}\times ١٠٠ = ١٤٠,١٦\%$$

٢ - $$\frac{\text{مجـ}\left(\frac{ع_1}{ع_0}\times ع_1\ ك_1\right)}{\text{مجـ}\left(ع_1\ ك_1\right)}\times ١٠٠ = \frac{١٧٠١٠٠٢,٥}{١١٩٣٠٥٠}\times ١٠٠ = ١٤٢,٥٨\%$$

٣ - $$\frac{\text{مجـ}\left(\frac{ع_1}{ع_0}\times ع_0\ ك_1\right)}{\text{مجـ}\left(ع_0\ ك_1\right)}\times ١٠٠ = \frac{١١٩٢٨١٠}{٨٥٣٠٠٠}\times ١٠٠ = ١٣٩,٨٤\%$$

٤ - $$\frac{\text{مجـ}\left(\frac{ع_1}{ع_0}\times ع_1\ ك_0\right)}{\text{مجـ}\left(ع_1\ ك_0\right)}\times ١٠٠ = \frac{١٣١٤٣٥٨}{٩١٧٧٤٠}\times ١٠٠ = ١٤٣,٢٢\%$$

٥ - $$\frac{\text{مجـ}\left(\frac{ك_1}{ك_0}\times ع_0\ ك_0\right)}{\text{مجـ}\left(ع_0\ ك_0\right)}\times ١٠٠ = \frac{٨٥٢٩٧٤}{٦٥٤٣٠٠}\times ١٠٠ = ١٣٠,٣٦\%$$

٦ - $$\frac{\text{مجـ}\left(\frac{ك_1}{ك_0}\times ع_1\ ك_1\right)}{\text{مجـ}\left(ع_1\ ك_1\right)}\times ١٠٠ = \frac{١٥٥٤١٠٥}{١١٩٣٠٥٠}\times ١٠٠ = ١٣٠,٢٦\%$$

(*) انظر الجدول رقم (٣) السابق

$$٧-\quad \frac{\text{مجـ}\left(\frac{\text{ك}_{١}}{\text{ك}_{٠}}\times \text{ع}_{٠}\,\text{ك}_{١}\right)}{\text{مجـ}\left(\text{ع}_{٠}\,\text{ك}_{١}\right)}\times ١٠٠ = \frac{١١٢٧٣٨٠}{٨٥٣٠٠٠}\times ١٠٠ = ١٣٢,١٥\,\%$$

$$٨-\quad \frac{\text{مجـ}\left(\frac{\text{ك}_{١}}{\text{ك}_{٠}}\times \text{ع}_{١}\,\text{ك}_{٠}\right)}{\text{مجـ}\left(\text{ع}_{١}\,\text{ك}_{٠}\right)}\times ١٠٠ = \frac{١١٩٣٠١٨}{٩١٧٧٤٠}\times ١٠٠ = ١٣٠\,\%$$

إخـتـبـارات الأرقـام الـقـيـاسـيـة

بإستعراض الصيغ السابقة للأرقـام القياسية سواء التجميعية العادية أو بإستـخـدام المناسيب – البسيطة أو المرجـحـة – يتبـادر إلى الزهن ذلك التساؤل، أى من هذه الصيغ تعتبر أفضل الأرقام القياسية ؟ والإجابة الكاملة والدقيـقة على التـساؤل السابق يقتضى منا المفاضلة بين صـيغ الأرقام القياسية من الناحيتين النظرية والعملية – وسنتناول فى هذا الجزء الناحية الأولى منها (*) – الأسس النظرية لإجراء المفاضلة بينهـا – والذى يرجع الفضل فيه إلى فيشر حيث إقترح عدة أسس أو إختبارات، فإذا إجتـازت إحدى الصيغ مجموعة هذه الإختيارات معا أمكن القول – نظرياً – أنها أفضل صيغ الأرقام القياسية وفيما يلى الاختبارات لفيشر وكيفية تطبيقها:

الإختـبار الأول : الانعكاس فى الزمن (Time reversal)

ولأتمام هذا الإختبار على أى رقم قياسى يقتضى هذا الأمر الحصول على البـديل الزمـنى – أو المعـامل الزمنى – لنفس الرقم، ويضـرب هذا البديل فـى الرقم القياسى ذاتـه ، فإذا كان ناتج عملية الضـرب السابقة واحد صحيحا (**) ، فيكون هذا الرقم القياسى قد إجتاز إختبـار الانعكاس فى الزمن، أما إذا كان ناتج عملية الضرب المشار إليها سابقاً تختلف عن الواحد

(*) على أن نتناول الأسس العملية فيما بعد.

(**) وهذه النتيجـة منطقـية، حيث أنه يجب أن يتـساوى أى رقم قـياسى مع مـقلوب الرقم والا اعـتـبـر الرقم القـيـاسى خـاطئـاً ، ومن ثم لا يؤدى المعنى والغـرض المستهدف منه.

الصحيح – أقل أو أكثر من الواحد الصحيح – فيكون الأمر مختلفا أى أن هناك تحيز فيها وعلى ذلك يكون الرقم القياسى لم يجتاز إختبار الانعكاس فى الزمن :

٢ – البديل الزمنى (المعامل الزمنى) : والبديل الزمنى لأى صيغة من صيغ الأرقام القياسية ، هى ذات الرقم القياسى محسوباً بطريقة عكسية، وما سبق يعنى إعتبارنا نقطة الأساس فى الرقم الأصلى نقطة مقارنة فى البديل الزمنى ، وأيضاً اعتبار نقطة المقارنة فى الرقم الأصلى نقطة أساس فى البديل الزمنى ، سواء كان ذلك بالنسبة للأسعار (ع) أو

= المقلوب الزمنى لأى رقم قياسى = $\frac{1}{\text{البديل الزمنى للرقم القياسى}}$ ، فعلى سبيل المثال

فإن الرقم القياسى لسعر سلعة ما وليكن $\frac{ع_1}{ع_.}$ فإن مقلوبة الزمنى = $\frac{1}{\frac{ع_1}{ع_.}}$

وعليه فإن = $\frac{ع_1}{ع_.} \times \frac{1}{\frac{ع_1}{ع_.}} = \frac{ع_1}{ع_.} \times \frac{ع_.}{ع_1}$ (البديل الزمنى) = ١

وهذا منطقياً ، فإذا أعطى الرقم القياسى السابق نتيجة تفيد أن السعر زاد بنسبة ٣٠٪ بين النقطتين (٠) ، (١) فإنه يجب أن يعكس أيضاً أن السعر قد انخفض بنسبة ٣٣٪ بين النقطتين (١) ، (٠) أى أن إذا كان ع(١) = ١٣٠ ، ع(٠) = ١٠٠

فإن : $\frac{130}{100} \times \frac{1}{\frac{130}{100}} = \frac{130}{100} \times \frac{100}{130}$

$= 1.3 \times 0.77 = 1$

للكميات (ك) أو للأثنين معاً (ع × ك) أى القيمة (ق) أو بصورة أخرى.

نستبدل ع (٠) بـ ع (١)
أو نستبدل ع (١) بـ ع (٠)
وتستبدل ك (٠) بـ ك (١)
أو نستبدل ك (١) بـ ك (٠)

سواء بالنسبة للزمان أو للمكان فى الأرقام القياسية المختلفة

فعلى سبيل المثال :

الرقم القياسى للأسعار للاسبير = $\frac{\text{مجـ } ع_١ ك_٠}{\text{مجـ } ع_٠ ك_٠}$ يكون بديله الزمنى = $\frac{\text{مجـ } ع_٠ ك_١}{\text{مجـ } ع_١ ك_١}$ ، الرقم القياسى للكميات للاسبير = $\frac{\text{مجـ } ك_١ ع_٠}{\text{مجـ } ك_٠ ع_٠}$ يكون بديلة الزمنى = $\frac{\text{مجـ } ك_٠ ع_١}{\text{مجـ } ك_١ ع_١}$ وهكذا الأمر مع باقى صيغ الأرقام القياسية المختلفة السابق دراستها وبإجراء عملية الضرب المشار إليها بين أى رقم أصلى فى بديله الزمنى تنحصر النتائج فيما يلى :

(أ) الرقم القياسى التجميعى البسيط للأسعار :

$$= \frac{\text{مجـ } ع_١}{\text{مجـ } ع_٠} \times \frac{\text{مجـ } ع_٠}{\text{مجـ } ع_١} \text{ (البديل الزمنى) } = ١$$

(يجتاز إختيار الأنعكاس فى الزمن)

وبتطبيقها على المثال رقم (١) السابق نجد :

$$= \frac{٨٢٥٢}{٤٦٦٢} \times \frac{٤٦٦٢}{٨٢٥٢} = ١$$

(يجتاز اختيار الانعكاس فى الزمن)

(ب) الرقم القياسى التجميعى المرجح بكميات سنة الأساس (لاسبير للأسعار) :

$$= \frac{مجـ\ ع_{١}\ ك_{٠}}{مجـ\ ع_{٠}\ ك_{٠}} \times \frac{مجـ\ ع_{٠}\ ك_{١}}{مجـ\ ع_{١}\ ك_{١}} \neq ١$$

(لا يجتاز إختبار الإنعكاس فى الزمن)

وبتطبيقها على المثال رقم (٢) السابق نجد :

$$= \frac{٩١٧٧٤٠}{٦٥٤٣٠٠} \times \frac{٨٥٣٠٠٠}{١١٩٣٠٥٠} \neq ١$$

$$= ١,٤٠٣ \times ١,٣٩٦ = ١,٩٦ > ١$$

(حـ) الرقم القياسى التجميعى المرجح بكميات سنة المقارنة (باشى للأسعار) :

$$= \frac{مجـ\ ع_{١}\ ك_{١}}{مجـ\ ع_{٠}\ ك_{١}} \times \frac{مجـ\ ع_{٠}\ ك_{٠}}{مجـ\ ع_{١}\ ك_{٠}} \neq ١$$

(لا يجتاز إختبار الانعكاس فى الزمن)

وبتطبيقها على المثال رقم (٢) السابق نجد :

$$= \frac{١١٩٣٠٥٠}{٨٥٣٠٠٠} \times \frac{٦٥٤٣٠٠}{٩١٧٧٤٠}$$

$$= ١,٣٩٦ \times ٠,٧١٣ = ٠,٩٩٦ < ١$$

(د) الرقم القياسى لمارشال وادچوارث للأسعار (كوسط حسابى) :

$$= \frac{\sum ع_{١} (ك_{٠} + ك_{١})}{\sum ع_{٠} (ك_{٠} + ك_{١})} \times \frac{\sum ع_{٠} (ك_{١} + ك_{٠})}{\sum ع_{١} (ك_{١} + ك_{٠})} = ١$$

(يجتاز إختبار الأنعكاس فى الزمن)

وبالتطبيق على المثال رقم (٤) السابق نجد :

$$= \frac{٢١١٠٧٩٠}{١٥٠٧٣٠٠} \times \frac{١٥٠٧٣٠٠}{٢١١٠٧٩٠} = ١$$

(هـ) الرقم القياسى لمارشال وادچوارث للأسعار (كوسط هندسى) :

$$= \frac{\sum ع_{١} \sqrt{ك_{٠} ك_{١}}}{\sum ع_{٠} \sqrt{ك_{٠} ك_{١}}} \times \frac{\sum ع_{٠} \sqrt{ك_{١} ك_{٠}}}{\sum ع_{١} \sqrt{ك_{١} ك_{٠}}} = ١$$

(يجتاز اختبار الأنعكاس فى الزمن)

وبالتطبيق على المثال رقم (٥) السابق نجد :

$$= \frac{١٠٤٦١١١,٤٧}{٧٤٦٩٤٤,٥٨} \times \frac{٧٤٦٩٤٤,٥٨}{١٠٤٦١١١,٤٧} = ١$$

(و) الرقم القياسى للأسعار لفيشر :

$$= \sqrt{\frac{\text{مجـ } ع_{١} ك_{٠}}{\text{مجـ } ع_{٠} ك_{٠}} \times \frac{\text{مجـ } ع_{١} ك_{١}}{\text{مجـ } ع_{٠} ك_{١}}} \times \sqrt{\frac{\text{مجـ } ع_{٠} ك_{١}}{\text{مجـ } ع_{١} ك_{١}} \times \frac{\text{مجـ } ع_{٠} ك_{٠}}{\text{مجـ } ع_{١} ك_{٠}}} = ١$$

(يجتاز إختيار الانعكاس فى الزمن)

وبالتطبيق على المثال رقم (٢) السـابق نجد :

$$= \sqrt{\frac{٩١٧٧٤٠}{٦٥٤٣٠٠} \times \frac{١١٩٣٠٥٠}{٨٥٣٠٠٠}} \times \sqrt{\frac{٨٥٣٠٠٠}{١١٩٣٠٥٠} \times \frac{٦٥٤٣٠٠}{٩١٧٧٤٠}} = ١$$

(ز) الرقم القياسى التجميعى البسيط للكميات :

$$= \frac{\text{مجـ } ك_{١}}{\text{مجـ } ك_{٠}} \times \frac{\text{مجـ } ك_{٠}}{\text{مجـ } ك_{١}} = ١$$

(يجتاز أختيار الأنعكاس فى الزمن)

وبالتطبيق على المثال رقم (٦) السابق نجد :

$$= \frac{١٤١}{١٥٣} \times \frac{١٥٣}{١٤١} = ١$$

(ح) رقم لاسبير للكميات :

$$= \frac{\text{مجـ } ك_١ ع_٠}{\text{مجـ } ك_٠ ع_٠} \times \frac{\text{مجـ } ك_٠ ع_١}{\text{مجـ } ك_١ ع_١} \neq ١$$

(لا يجتاز أختبار الأنعكاس فى الزمن)

وبالتطبيق على المثال رقم (٦) السابق نجد :

$$= \frac{٧٢٢}{٧١١} \times \frac{٧١٨}{٧١٤}$$

$$= ١,٠١٥ \times ١,٠٠٦ = ١,٠٢١ > ١$$

(ط) رقم باشى للكميات :

$$= \frac{\text{مجـ } ك_١ ع_١}{\text{مجـ } ك_٠ ع_١} \times \frac{\text{مجـ } ك_٠ ع_٠}{\text{مجـ } ك_١ ع_٠} \neq ١$$

(لا يجتاز إختبار الأنعكاس فى الزمن)

وبالتطبيق على المثال رقم (٦) السابق نجد :

$$= \frac{٧١٤}{٧١٨} \times \frac{٧١١}{٧٢٢}$$

$$= ٠,٩٩٤ \times ١,٠١٥ = ١,٠٠٩ > ١$$

(ى) رقم مارشال وإدجوارث للكميات (كوسط حسابى) :

$$= \frac{\text{مجـ}\, ك_{١} \,(ع_{٠} + ع_{١})}{\text{مجـ}\, ك_{٠} \,(ع_{٠} + ع_{١})} \times \frac{\text{مجـ}\, ك_{٠} \,(ع_{١} + ع_{٠})}{\text{مجـ}\, ك_{١} \,(ع_{١} + ع_{٠})} = ١$$

(يجتاز إختبار الانعكاس فى الزمن)

وبالتطبيق على المثال رقم (٦) السابق نجد :

$$= \frac{١٨٧٦}{٢٠٢٩} \times \frac{٢٠٢٩}{١٨٧٦} = ١$$

(ك) رقم مارشال وإدچوارث للكميات (كوسط هندسى) :

$$= \frac{\text{مجـ}\, ك_{١} \sqrt{ع_{٠}\, ع_{١}}}{\text{مجـ}\, ك_{٠} \sqrt{ع_{٠}\, ع_{١}}} \times \frac{\text{مجـ}\, ك_{٠} \sqrt{ع_{١}\, ع_{٠}}}{\text{مجـ}\, ك_{١} \sqrt{ع_{١}\, ع_{٠}}} = ١$$

(يجتاز إختبار الانعكاس فى الزمن)

بالتطبيق على المثال رقم (٦) السابق نجد :

$$= \frac{٦٨١,١٩}{٧٣٤,٦٤} \times \frac{٧٣٤,٦٤}{٦٨١,١٩} = ١$$

(ل) رقم فيشر للكميات :

$$= \sqrt{\frac{\text{مجـ ك}_١ \text{ع}_٠}{\text{مجـ ك}_٠ \text{ع}_٠} \times \frac{\text{مجـ ك}_١ \text{ع}_١}{\text{مجـ ك}_٠ \text{ع}_١}} \times \sqrt{\frac{\text{مجـ ك}_٠ \text{ع}_١}{\text{مجـ ك}_١ \text{ع}_١} \times \frac{\text{مجـ ك}_٠ \text{ع}_٠}{\text{مجـ ك}_١ \text{ع}_٠}} = ١$$

(يجتاز إختبار الانعكاس فى الزمن)

وبالتطبيق على المثال رقم (٦) السابق نجد :

$$= \sqrt{\frac{٧٢٢}{٧١١} \times \frac{٧١٤}{٧١٨}} = \sqrt{\frac{٧١٨}{٧١٤} \times \frac{٧١١}{٧٢٢}}$$

$$= \sqrt{١,٠٠٩} \times \sqrt{٠,٩٩٠٩}$$

$$= ١,٠٠٤٦ \times ٠,٩٩٥٤ = ١$$

ونود أن نشير هنا أيضاً أنه بتطبيق إختبار الانعكاس فى الزمن على الأرقام القياسية بالمناسيب على نفس المنوال السابق فى الأرقام القياسية التجميعية السابقة سنجد :

١ - أن الوسط الحسابى البسيط للمناسيب لا يجتاز اختبار الأنعكاس فى الزمن.

٢ - أن الوسـط الحسابى للمناسيب المرجح بأى وزن من الأوزان لا يجتاز إختبار الأنعكاس فى الزمن.

٤ - أن الوسط الهندسى للمناسيب المرجح بأى وزن من الأوزان لا يجتاز أختبار الأنعكاس فى الزمن .

الإختبار الثانى : إختبار الإنعكاس فى المعامل (Factor reversal) :

ولإتمام هذا الإختبار على أى رقم قياسى يقتضى الأمر أولاً الحصول على البديل المعاملى ثم ضربه فى الرقم القياسى الأصلى فإذا كان ناتج الضرب يساوى منسوب القيمة (*) أى = $\frac{\text{مجـ } ع_1 ك_1}{\text{مجـ } ع_. ك_.}$ فإن الرقم يجتاز هذا الإختبار

وذلك يعنى أن الشرط الواجب تحققه لاجتياز أى رقم هذا الاختبار أن :

$$\text{الرقم القياسى الأصلى} \times \text{البديل المعاملى} = \frac{\text{مجـ } ع_1 ك_1}{\text{مجـ } ع_. ك_.}$$

(*) وهذه النتيجة منطقية ، فإذا اخذنا الرقم القياسى للأسعار لعدة سلع فى سنتين مختلفتين، وتم استخدام نفس الصيغة السابقة للرقم القياسى للكميات لنفس السلع فى نفس السنتين، فمن الضرورى أن يكون حاصل ضرب الرقمين السابقين - للأسعار والكميات - مساوياً للنسبة بين قيم هذه السلع (حيث أن [القيمة (ق) = السعر (ع) × الكمية (ك)] فى نفس السنتين محل الدراسة، فإذا أدى الأمر السابق إلى خلاف ما سبق فتكون صيغة الرقم القياسى خاطئة فى تصورها للتغير الذى يحدث فى ظاهرتى السعر، والكمية، وبالتالى يكون صيغة الرقم القياسى لا يجتاز إختبار الانعكاس فى المعامل .

هنا يمكننا القول أن الرقم القياسى الأصلى قد إجتاز اختبار الانعكاس فى المعامل أما إذا كان حاصل الضرب السابق لا يؤدى إلى منسوب القيمة السابق ، فالرقم القياسى هنا لا يكون قد إجتاز هذا الاختبار .

٤ - البديل المعاملى :

للحصول على البديل المعاملى لصيغة أى رقم قياسى هو نفسه الصيغة الأصلية لهذا الرقم، بشرط إستبدال الكمية (ك) بدلاً عن السعر (ع)، وأيضاً إستبدال السعر (ع) بدلاً من الكمية (ك) مع بقاء عامل الزمن ثابت وبصورة أخرى :

إستبدال ($ع_{.}$) بـ ($ك_{.}$)
، إستبدال ($ع_{١}$) بـ ($ك_{١}$)
، إستبدال ($ك_{.}$) بـ ($ع_{.}$)
، إستبدال ($ك_{١}$) بـ ($ع_{١}$)

سواء بالنسبة للزمان أو للمكان فى الأرقام القياسية المختلفة

فبتطبيق الإختبار السابق على الأرقام القياسية المختلفة سنجد :

(أ) الرقم القياسى التجميعى البسيط لأسعار :

$$= \frac{مجـ\ ع_{١}}{مجـ\ ع_{.}} \times \frac{مجـ\ ك_{١}}{مجـ\ ك_{.}} \text{ (البديل المعاملى) } =$$

$$= \frac{\text{مجـ } ع_1 \text{ مجـ } ك_1}{\text{مجـ } ع_0 \text{ مجـ } ك_0} \neq \frac{\text{مجـ } ع_1 ك_1}{\text{مجـ } ع_0 ك_0} \quad (**)$$

(لا يجتاز إختبار الانعكاس فى المعامل)

(ب) الرقم القياسى للأسعار للاسبير :

$$= \frac{\text{مجـ } ع_1 ك_0}{\text{مجـ } ع_0 ك_0} \times \frac{\text{مجـ } ك_1 ع_0}{\text{مجـ } ك_0 ع_0} \neq \frac{\text{مجـ } ع_1 ك_1}{\text{مجـ } ع_0 ك_0}$$

(لا يجتاز إختيار الانعكاس فى المعامل)

وبتطبيقها على المثال رقم (٣) السابق نجد :

$$= \frac{٩١٧٧٤٠}{٦٥٤٣٠٠} \times \frac{٨٥٣٠٠٠}{٦٥٤٣٠٠} = \frac{٧٨٢٨٣٢٢٠٠٠٠}{٤٢٨١٠٨٤٩٠٠٠٠}$$

$$= \frac{٧٨٢٨٣٢٢}{٤٢٨١٠٨٤٩} \neq \frac{١١٩٣٠٥٠}{٦٥٤٣٠٠}$$

(**) من المعروف أن $\frac{\text{مجـ } ع_1 \text{ مجـ } ك_1}{\text{مجـ } ع_0 \text{ مجـ } ك_0}$ تعنى حاصل ضرب إجمالى السعر فى إجمالى الكميات بمجموعة السلع الداخلة فى تركيب الرقم $\frac{\text{مجـ } ع_1 ك_1}{\text{مجـ } ع_0 ك_0}$ تعنى مجموعه حواصل كل سعر فى الكمية المناظرة له لمجموعة السلع .

(حـ) رقم باشى للأسعار :

$$\frac{\text{مجـ}\ ع_{١}\ ك_{١}}{\text{مجـ}\ ع_{٠}\ ك_{١}} \times \frac{\text{مجـ}\ ك_{١}\ ع_{١}}{\text{مجـ}\ ك_{٠}\ ع_{١}} - \frac{\text{مجـ}\ ع_{١}\ ك_{١}}{\text{مجـ}\ ع_{٠}\ ك_{٠}}$$

(لا يجتاز إختبار الأنعكاس فى المعامل)

وبالتطبيق على المثال رقم (٣) السابق نجد :

$$= \frac{\text{١١٩٣٠٥٠}}{\text{٨٥٣٠٠٠}} \times \frac{\text{١١٩٣٠٥٠}}{\text{٦٥٤٣٠٠}}$$

$$= \frac{\text{١٤٢٣٤٨٧٦١}}{\text{٧٢٧٦٠٩٠٠}} \simeq \frac{\text{١١٩٣٠٥٠}}{\text{٦٥٤٣٠٠}}$$

(د) الرقم القياسى لمارشال وإدچوارث للأسعار (كوسط حسابى) :

$$\frac{\text{مجـ}\ ع_{١}\ (ك_{٠} + ك_{١})}{\text{مجـ}\ ع_{٠}\ (ك_{٠} + ك_{١})} \times \frac{\text{مجـ}\ ك_{١}\ (ع_{٠} + ع_{١})}{\text{مجـ}\ ك_{٠}\ (ع_{٠} + ع_{١})} - \frac{\text{مجـ}\ ع_{١}\ ك_{١}}{\text{مجـ}\ ع_{٠}\ ك_{٠}}$$

(لا يجتاز إختبار الانعكاس فى المعامل)

وبالتطبيق على المثال رقم (٤) السابق نجد : (*)

$$\frac{\text{٢١١٠٧٩٠}}{\text{١٥٠٧٣٠٠}} \times \frac{\text{٢٠٤٦٠٥٠}^{(*)}}{\text{١٥٧٢٠٤٠}} \neq \frac{\text{١١٩٣٠٥٠}}{\text{٦٥٤٣٠٠}}$$

(هـ) الرقم القياسى لمارشال وادچوارث (كوسط هندسى) :

$$= \frac{\text{مجـ } ع_{١} \sqrt{ك_{٠}\, ك_{١}}}{\text{مجـ } ع_{٠} \sqrt{ك_{٠}\, ك_{١}}} \times \frac{\text{مجـ } ك_{١} \sqrt{ع_{٠}\, ع_{١}}}{\text{مجـ } ك_{٠} \sqrt{ع_{٠}\, ع_{١}}} - \frac{\text{مجـ } ع_{١}\, ك_{١}}{\text{مجـ } ع_{٠}\, ك_{٠}}$$

(لا يجتاز إختبار الإنعكاس فى المعامل)

وبالتطبيق على المثال رقم (٤) السابق نجد : (**)

$$\frac{١٠٤٦١١١}{٧٤٦٩٤٥} \times \frac{١٠٠٦٨١٦}{٧٧٣٢٦١} - \frac{١١٩٣٠٥٠}{٦٥٤٣٠٠}$$

(و) الرقم القياسى للأسعار لفيشر :

$$\sqrt{\frac{\text{مجـ } ع_{١}\, ك_{٠}}{\text{مجـ } ع_{٠}\, ك_{٠}} \times \frac{\text{مجـ } ع_{١}\, ك_{١}}{\text{مجـ } ع_{٠}\, ك_{١}}} \times \sqrt{\frac{\text{مجـ } ك_{١}\, ع_{٠}}{\text{مجـ } ك_{٠}\, ع_{٠}} \times \frac{\text{مجـ } ك_{١}\, ع_{١}}{\text{مجـ } ك_{٠}\, ع_{١}}}$$

(*) مجـ ك١ $(ع_{٠} + ع_{١})$			مجـ $ك_{٠}$ $(ع_{٠} + ع_{١})$		
٨٠٠٠	(٧)	= ٥٦٠٠٠	٧٣٠٠	(٧)	= ٥١١٠٠
٩٠٠	(٢٦٠)	= ٢٣٤٠٠٠	٧٣٠	(٢٦٠)	= ١٨٩٨٠٠
٤٨٠	(٣٥٠٠)	= ١٦٨٠٠٠٠	٣٦٥	(٣٥٠٠)	= ١٢٧٧٥٠٠
١٥٠	(١٤٧)	= ٢٢٠٥٠	١٢٠	(١٤٧)	= ١٧٦٤٠
٦	(٩٠٠٠)	= ٥٤٠٠٠	٤	(٩٠٠٠)	= ٣٦٠٠٠
		٢٠٤٦٠٥٠			١٥٧٢٠٤٠

$$= \frac{\text{مجـ ع}_1 \text{ ك}_1}{\text{مجـ ع}_0 \text{ ك}_0}$$

(يجتاز إختبار الانعكاس فى المعامل)

بالتطبيق على المثال رقم (٢) السابق نجد :

$$= \sqrt{\frac{٩١٧٧٤٠}{٦٥٤٣٠٠} \times \frac{١١٩٣٠٥٠}{٨٥٣٠٠٠}} \times \sqrt{\frac{٨٥٣٠٠٠}{٦٥٤٣٠٠} \times \frac{١١٩٣٠٥٠}{٩١٧٧٤٠}}$$

$$= \frac{١١٩٣٠٥٠}{٦٥٤٣٠٠} = \frac{\text{مجـ ك}_1 \text{ ع}_1}{\text{مجـ ك}_0 \text{ ع}_0}$$

(ز) الرقم القياسى التجميعى البسيط للكميات:

$$= \frac{\text{مجـ ك}_1}{\text{مجـ ك}_0} \times \frac{\text{مجـ ع}_1}{\text{مجـ ك}_1} \text{ (بديلة المعامل) } \neq \frac{\text{مجـ ك}_1 \text{ مجـ ع}_1}{\text{مجـ ك}_0 \text{ مجـ ك}_1}$$

(**) مجـ $\text{ك}_1 \sqrt{\text{ع}_0 \text{ ع}_1}$			مجـ $\text{ك}_0 \sqrt{\text{ع}_0 \text{ ع}_1}$		
٨٠٠٠	(٣,١٦٢)	=٢٥٢٩٦	٧٣٠٠	(٣,١٦٢)	٢٣٠٨٣
٩٠٠	(١٢٦,٤٩١)	=١١٣٨٤٢	٧٣٠	(١٢٦,٤٩١)	٩٢٣٣٨
٤٨٠	(١٧٣٢,٠٥١)	=٨٣١٣٨٤	٣٦٥	(١٧٣٢,٠٥١)	٦٣٢٢١٩٩
١٥٠	(٧٢,٢٥٠)	=١٠٨٣٨	١٢٠	(٧٢,٢٥٠)	٨٦٧٠
٦	(٤٢٤٢,٦٤١)	=٢٥٤٥٦	٤	(٤٢٤٢,٦٤١)	١٦٩٧١
		١٠٠٠٦٨١٦			٧٧٣٢٦١

$$= \frac{\text{مجـ ك}_1 \text{ع}_1}{\text{مجـ ك}_0 \text{ع}_0}$$

(لا يجتاز إختبار الأنعكاس فى المعامل)

بالتطبيق على المثال رقم (٦) السابق نجد :

$$= \frac{١٤١}{١٥٣} \times \frac{٣٦}{٣١}$$

$$= \frac{٥٠٧٦}{٤٧٤٣} = \frac{٧١٤}{٧١١}$$

(ح) رقم لا سبير للكميات :

$$= \frac{\text{مجـ ك}_1 \text{ع}_0}{\text{مجـ ك}_0 \text{ع}_0} \times \frac{\text{مجـ ع}_1 \text{ك}_0}{\text{مجـ ع}_0 \text{ك}_0} \neq \frac{\text{مجـ ك}_1 \text{ع}_1}{\text{مجـ ك}_0 \text{ع}_0}$$

(لا يجتاز إختبار الأنعكاس فى المعامل)

بالتطبيق على المثال رقم (٦) السابق نجد :

$$= \frac{٧٢٢}{٧١١} \times \frac{٧١٨}{٧١١} = \frac{٥١٨٣٩٦}{٥٠٥٥٢١}$$

$$= ١,٠٢٥٥$$

$$= \frac{٧١٤}{٧١١}$$

$$= ١,٠٠٤٢٢$$

أى أن ١,٠٢٥٥ ≠ ١,٠٠٤٢٢

(ط) رقم باشى للكميات :

$$= \frac{\text{مجـ } ك_{1} ع_{1}}{\text{مجـ } ك_{0} ع_{1}} \times \frac{\text{مجـ } ع_{1} ك_{1}}{\text{مجـ } ع_{0} ك_{1}} \neq \frac{\text{مجـ } ك_{1} ع_{1}}{\text{مجـ } ك_{0} ع_{0}}$$

(لا يجتاز إختبار الأنعكاس فى المعامل)

بالتطبيق على المثال رقم (٦) السابق نجد :

$$= \frac{٧١٤}{٧١٨} \times \frac{٧١٤}{٧٢٢} = \frac{٥٠٩٧٩٦}{٥١٨٣٩٦} = ٠,٩٨٣٤$$

$$- \frac{٧١٤}{٧١١} \neq ١,٠٠٤٢$$ أى أن ٠,٩٨٣٤ ≠ ١,٠٠٤٢

رقم مارشال وإدچوارث للكميات (كوسط حسابى) :

(**) $\text{مجـ } ع_{1}$	$\sqrt{ك_{0} ك_{1}}$		$\text{مجـ } ع_{0}$	$\sqrt{ك_{0} ك_{1}}$	
٢٠	(١٣)	= ٢٦٠	١٥	(١٣)	= ١٩٥
٦	(٤٣)	= ٢٥٨	٢	(٤٣)	= ٨٦
٧	(٥٠)	= ٣٥٠	١٠	(٥٠)	= ٥٠٠
٣	(١٨٨)	= ٢٦٤	٤	(١٨٨)	= ٧٥٢
		١٤٣٢			١٥٣٣

$$= \frac{\text{مجـ } ك_{1}\ (ع_{0} + ع_{1})}{\text{مجـ } ك_{0}\ (ع_{0} + ع_{1})} \times \frac{\text{مجـ } ع_{1}\ (ك_{0} + ك_{1})}{\text{مجـ } ع_{0}\ (ك_{0} + ك_{1})}\ ^{(*)}$$

$$\neq \frac{\text{مجـ } ك_{1} ع_{1}}{\text{مجـ } ك_{0} ع_{0}}$$

(لا يجتاز إختبار الانعكاس فى المعامل)

بالتطبيق على المثال رقم (٥) السابق نجد :

$$= \frac{١٨٧٦}{٢٠٢٩} \times \frac{١٤٣٢}{١٥٣٣} = \frac{٢٦٨٦٤٣٢}{٣١١٠٤٥٧}$$

$$= ٠,٨٦٣٦٨$$

$$\neq \frac{٧١٤}{٧١١} = ١,٠٠٤٢$$

أى أن ٠,٨٦٣٦٨ $\neq$ ١,٠٠٤٢

(*)

٢٠	٦,٣٢٤)	=١٢٦,٤٨	١٥	(٦,٣٢٤)	٩٤,٨٦
٦	(٢١,٢١٣)	=١٢٧,٢٧٨	٢	(٢١,٢١٣)	٤٢,٤٢٦
٧	(٢٤,٤٩٥)	=١٧١,٤٦٥	١٠	(٢٤,٤٩٥)	٢٤٤,٩٥
٣	(٩٣,٨٠٨)	=٢٨١,٤٢٤	٤	(٩٣,٨٠٨)	٣٧٥,٢٣٢
		٧٠٦,٦٤٧			٧٥٧,٤٦٨

(ك) رقم مارشال وإدجوارث (كوسط هندسى) :

$$\frac{\text{مجـ ك}_1\sqrt{\text{ع}_.\text{ع}_1}}{\text{مجـ ك}_.\sqrt{\text{ع}_.\text{ع}_1}} \times \frac{\text{مجـ ع}_1\sqrt{\text{ك}_.\text{ك}_1}}{\text{مجـ ع}_.\sqrt{\text{ك}_.\text{ك}_1}} \neq \frac{\text{مجـ ع}_1\text{ك}_1}{\text{مجـ ع}_.\text{ك}_.}$$

(لا يجتاز إختيار الانعكاس فى المعامل)

وبالتطبيق على المثال رقم (٥) السابق نجد :

$$= \frac{٦٨١,١٩}{٧٣٤,٦٤} \times \frac{٧٠٦,٦٥^{(*)}}{٧٥٧,٤٧} = \frac{٤٨١٣٦٣}{٥٥٦٤٦٨}$$

= ٠,٨٦٥

– ١,٠٠٤٢

أى أن ٠,٨٦٥ = ١,٠٠٤٢

(ل) الرقم القياسى للكميات لفيشر :

$$= \frac{\text{مجـ ك}_1\text{ع}_.}{\text{مجـ ك}_.\text{ع}_.} \times \frac{\text{مجـ ك}_1\text{ع}_1}{\text{مجـ ك}_.\text{ع}_1} \times \frac{\text{مجـ ع}_1\text{ك}_.}{\text{مجـ ع}_.\text{ك}_1} \times \frac{\text{مجـ ع}_1\text{ك}_1}{\text{مجـ ع}_.\text{ك}_1}$$

$$= \frac{\text{مجـ ك}_1\text{ع}_1}{\text{مجـ ك}_.\text{ع}_.}$$

(يجتاز إختبار الانعكاس فى المعامل)

بالتطبيق على المثال رقم (٥) السابق نجد :

$$= \frac{٧٢٢}{٧١١} \times \frac{٧١٤}{٧١٨} \times \frac{٧١٨}{٧١١} \times \frac{٧١٤}{٧٢٢}$$

$$\frac{\text{مجـ ع}_{١}\text{ ك}_{١}}{\text{مجـ ع}_{٠}\text{ ك}_{٠}} = \frac{٧١٤}{٧١١} =$$

من كل ما سبق يتضح لنا ما يلى :

أولاً : الأرقام القياسية التى تجتاز الاختبار الأول (الانعكاس فى الزمن) هى :

١ – الرقم القياسى التجميعى البسيط للأسعار وللكميات.

٢ – الرقم القياسى لمارشال وإدجوارث كوسط حسابى ووسط هندسى للأسعار والكميات.

٣ – الرقم القياسى لفيشر للأسعار والكميات.

٤ – الوسط الهندسى البسيط للمناسيب.

ثانياً : الأرقام القياسية التى تجتاز الاختبار الثانى (الانعكاس فى المعامل) فقد إقتصرت على الرقم القياسى لفيشر للأسعار والكميات .

وعليه فالرقم القياسى الذى إجتاز الاختبارين فى نفس الوقت هو الرقم القياسى لفيشر (للأسعار وللكميات) لذا أطلق عليه الرقم القياسى الأمثل.

ثالثاً : إن باقى الأرقام الأخرى لا تجتاز أى من الاختبارين السابقين.

تعديل نقطة الأساس

قد يتطلب الأمر منا تغيير نقطة الأساس لرقم قياسى معين (*) لأكثر

(*) رقم قياسى للأسعار أو للكميات أو الإنتاج ... الخ.

من سبب، أولهما لجعل نقطة الأساس حديثة نسبياً خاصة إذا ما كانت نقطة الأساس بعيدة نسبياً، وثانيهما، لتوحيد أساس رقمين قياسين أساسهما مختلف وذلك لتسهيل المقارنة بينهما، ويتضح لنا ما تقدم من معالجة المثالين التاليين:

مثـــال (١١) :

البيانات التالية للرقم القياسى للإنتاج الزراعى (١٩٦٥ = ١٠٠ خلال السنوات من ١٩٨٥ حتى ١٩٩٥ .

جـــدول (١٢)

السنة	١٩٨٥	١٩٨٦	١٩٨٧	١٩٨٨	١٩٨٩	١٩٩٠	١٩٩١	١٩٩٢	١٩٩٣	١٩٩٤	١٩٩٥
الإنتاج الزراعى (١٩٦٥=١٠٠) ٪	٨٠	٩٥	١٠٥	١١٥	١٢٠	١٣٠	١٣٥	١٤٢	١٥٠	١٥٥	١٦٠

والمطلوب : تعديل نقطة أو سنة الأساس إلى سنة ١٩٨٥ .

الحــــل :

يتم تغيير نقطة الأساس من عام ١٩٦٥ إلى عام ١٩٨٥ فى المثال السابق وفقاً لما يلى :

يتم قسمة كل رقم قياسى من الأرقام القياسية فى سلسلة الأرقام المعطاه عاليه على قيمة الرقم القياسى لعام ١٩٨٥ (نقطة أو سنة الأساس الجديدة) وضرب الناتج × ١٠٠ ، ونفس الأمر مع الأرقام القياسية للسنوات التالية لعام ١٩٨٥ أى أن :

الرقم القياسى للإنتاج الزراعى عام ١٩٨٥ = $\frac{٨٠}{٨٠} \times ١٠٠ = ١٠٠٪$

الرقم القياسى للإنتاج الزراعى عام ١٩٨٦ = $\frac{٩٥}{٨٠}$ × ١٠٠ = ١١٨,٧٥ ٪

الرقم القياسى للإنتاج الزراعى عام ١٩٨٧ = $\frac{١٠٥}{٨٠}$ × ١٠٠ = ١٣١,٢٥ ٪

الرقم القياسى للإنتاج الزراعى عام ١٩٨٨ = $\frac{١١٥}{٨٠}$ × ١٠٠ = ١٤٣,٧٥ ٪

الرقم القياسى للإنتاج الزراعى عام ١٩٨٩ = $\frac{١٢٠}{٨٠}$ × ١٠٠ = ١٥٠ ٪

وهكذ فى السنوات التالية حتى :

الرقم القياسى للإنتاج الزراعى عام ١٩٩٥ = $\frac{١٦٠}{٨٠}$ × ١٠٠ = ٢٠٠ ٪

وتصبح سلسلة الأرقام القياسية بعد التعديل كما يلى :

جـــدول (١٣)

السنة	١٩٨٥	١٩٨٦	١٩٨٧	١٩٨٨	١٩٨٩	١٩٩٠	١٩٩١	١٩٩٢	١٩٩٣	١٩٩٤	١٩٩٥
الإنتاج الزراعى (١٩٨٥=١٠٠) ٪	١٠٠	١١٨٧,٧٥	١٣١,٢٥	١٤٣,٧٥	١٥٠	١٦٢,٥	١٦٨,٧٥	١٧٧,٥	١٨٧,٥	١٩٣,٧٩	٢٠٠

مثـــال (١٢):

فما يلى سلسلتين من الأرقام القياسية الأولى أساسها عام ١٩٩٠ والثانية أساسها عام ١٩٩٥ والمطلوب إستكمال بيانات السلسلتين :

جـــدول (١٤)

البيان / السنة	السلسلة الأولى ١٩٩٠ = ١٠٠ %	السلسلة الثانية ١٩٩٥ = ١٠٠ %
١٩٩٠	١٠٠	$ص_1$
١٩٩١	٩٠	$ص_2$
١٩٩٢	١١٠	$ص_3$
١٩٩٣	١١٥	$ص_4$
١٩٩٤	١٢٥	$ص_5$
١٩٩٥	١٣٠	١٠٠
١٩٩٦	$س_1$	١١٠
١٩٩٧	$س_2$	١٤٠
١٩٩٨	$س_3$	١٥٠

أولاً : لإستكمال السلسلة الأولى التى أساسها عام ١٩٩٠ توجد الرقم القياسى للسنوات من ١٩٩٦ حتى ١٩٩٨ إلى أرقام تتبع السلسلة الثانية ويتم ذلك وفقاً لما يلى :

لما كان الرقم القياسى فى السلسلة الأولى لعام ١٩٩٥ = ١٣٠ وكان الرقم القياسى فى السلسلة الثانية لنفس العام (١٩٩٥) = ١٠٠ فإن النسبة بينهما هى ١٣٠ : ١٠٠ وهى النسبة التى تسود فى السنوات التالية لعام

١٩٩٥ وبضرب الأرقام القياسية المطلوبة فى السنوات المناظرة من السلسلة الثانية فى هذه النسبة نحصل على $س_1$ ، $س_2$ ، $س_3$ كما يلى :

$$\text{الرقم القياسى لعام ١٩٩٦ } (س_1) = ١١٠ \times \frac{١٣٠}{١٠٠} = ١٤٣$$

$$\text{الرقم القياسى لعام ١٩٩٧ } (س_2) = ١٤٠ \times \frac{١٣٠}{١٠٠} = ١٨٢$$

$$\text{الرقم القياسى لعام ١٩٩٨ } (س_3) = ١٥٠ \times \frac{١٣٠}{١٠٠} = ١٩٥$$

معنى ذلك أن الرقم القياسى لعام ١٩٩٦ فى السلسلة الأولى المناظر للرقم القياسى ١١٠ لنفس العام فى السلسلة الثانية يكون مساوياً = ١١٠ × ١,٣ (١٤٣ ٪) وهكذا بالنسبة لباقى السنوات ١٩٩٧ ، ١٩٩٨ .

ثانياً : لإستكمال السلسلة الثانية التى أساسها عام ١٩٩٥ نوجد الرقم القياسى للسنوات من ١٩٩٠ حتى ١٩٩٤ إلى أرقام تتبع السلسلة الأولى ويتم ذلك باحدى طريقتين:

أولهما لما كان الرقم القياسى فى السلسلة الثانية عام ١٩٩٥ = ١٠٠ ، وكان الرقم القياسى فى السلسلة الأولى لنفس العام (١٩٩٥) = ١٣٠ فإن النسبة بينهما هى ١٠٠ : ١٣٠ وهى النسبة التى تسود فى السنوات السابقة لعام ١٩٩٥ ، وبضرب الأرقام القياسية المعلومة فى السنوات المناظرة من السلسلة الأولى فى هذه النسبة ($\frac{١٠٠}{١٣٠}$) نحصل على $ص_1$ ، $ص_2$ ، $ص_3$ ، $ص_4$ ، $ص_5$ كما يلى :

الرقم القياسى عام ١٩٩٠ $(ص_١)$ = ١٠٠ × $\frac{١٠٠}{١٣٠}$ = ٧٦,٩٢

الرقم القياسى عام ١٩٩١ $(ص_٢)$ = ٩٠ × $\frac{١٠٠}{١٣٠}$ = ٦٩,٢٣

الرقم القياس عام١٩٩٢ $(ص_٣)$ = ١١٠ × $\frac{١٠٠}{١٣٠}$ = ٨٤,٦٢

الرقم القياسى عام١٩٩٣ $(ص_٤)$ = ١١٥ × $\frac{١٠٠}{١٣٠}$ = ٨٨,٤٦

الرقم القياسى عام ١٩٩٤ $(ص_٥)$ = ١٢٥ × $\frac{١٠٠}{١٣٠}$ = ٩٦,١٥

ثانيهما : بعد إستكمال الأرقام القياسية للسلسلة الأولى التى أساسها عام = ١٩٩٠ يمكن استكمال أرقام السلسلة الثانية التى أساسها عام = ١٩٩٥ بقسمة كل رقم من أرقام السلسلة الأولى السابقة لعام ١٩٩٥ على الرقم القياسى لعام ١٩٩٥ (١٣٠) فى نفس السلسلة الأولى ثم الضرب × ١٠٠ فنحصل على $ص_١$ ، $ص_٢$ ، $ص_٣$ ، $ص_٤$ ، $ص_٥$ فى السلسلة الثانية بنفس القيم التى جاءت بالطريقة الأولى وهى ٧٦,٩٢ ، ٦٩,٢٣ ، ٨٤,٦٢ ، ٨٨,٤٦، ٩٦,١٥ على الترتيب وتصبح السلسلتين الزمنيين بعد الاستكمال كما يلى :

جـدول (١٥)

البيـان / السنـة	السلسلة الأولى ١٩٩٠ = ١٠٠	السلسلة الثانية ١٩٩٥ = ١٠٠
١٩٩٠	١٠٠	٧٦,٩٢
١٩٩١	٩٠	٦٩,٢٣
١٩٩٢	١١٠	٨٤,٦٢
١٩٩٣	١١٥	٨٨,٤٦
١٩٩٤	١٢٥	٩٦,١٥
١٩٩٥	١٣٠	١٠٠
١٩٩٦	١٤٣	١١٠
١٩٩٧	١٨٢	١٤٠
١٩٩٨	١٩٥	١٥٠

الأرقــام القياسـيـة المتحـركـة

إن أسعـار السلع – أيا كانت – تتـغيـر من زمـان إلى زمـان، فيـتم إستخدام الأرقام القياسية للأسعار (زمانية) وذلك بتحديد السعر لوحدة قياس محددة من السلعة أو السلع فى نقطة زمـانية يتم إختيارها هى نقطة أو سنة الأساس) ثم ننسبها إلى سعر نفس السلعة – أو السلع – عند النقطة الزمانية التى يراد قياس التغير أو المقارنة عندها (نقطة أو سنة المقارنة) .

وحتى نطمئن إلى صحة المقارنة السابقة، وتحقيق الإستفادة المرجوه وللأطمئنان إلى نتائج الأرقام القياسية للأسعار – أو خلافها – بالنسبة إلى سنة الإساس، وخاصة إذا كانت بعيدة عن سنة المقارنة، أن نكون على يقين تام أو إلى درجة عالية – من أن الظروف ما زالت ثابتة، أو تقريباً على ما هى عليه خلال المدة بين سنتى الأساس والمقارنة للرقم القياسى المنشأ ، لكن ما سبق نادراً ما يحدث لأن الزمن كفيل بإحداث تغييرات كبيرة فى الظروف المحيطة بالسلع التى نبحثها والداخلة فى تركيب الأرقام القياسية ومن أهم هذه التغيرات – ما يحدث بسبب إختلاف وتغير أذواق المستهلكين من ناحية أو بسبب طموحات الإنسان وتطلعاته من ناحية أخرى أو أن يحدث تغير جذرى فى أساليب إنتاج سلعة يؤثر جذرياً فى سعرها – أن تكون السلعة شائعة الإستهلاك فى سنة الأساس فى حين يقل أو ينعدم إستهلاكها فى سنة المقارنة ، والعكس قد توجد بعض السلع لم تكن معروفة من قبل، أو على الأقل تزداد الأهمية النسبية لسلع ما أو تقل الأهمية النسبية لسلع أخرى، أى تتغير الأهمية النسبية بين السلع التى

تدخل فى تركيب الرقم القياسىبين فترة الأساس وفترة المقارنة وبالطبع غالباً ما يحدث من التغيرات السابقة إما كلها أو بعضها، خاصة إذا طالت أو إتسع الفارق الزمنى بين سنتى الأساس والمقارنة ، وحتى نقضى على مشكلة عدم ثبات الظروف المحيطة والمشار إليها عاليه – أى تلافيها – فإننا نلجأ إلى تركيب الأرقام القياسية المتسلسلة (Link Index) أو المتحركة وهى عبارة عن سلسلة من الأرقام القياسية فيها تكون سنة الأساس لكل منها هى السنة السابقة لها أى نحرك الأساس دورياً كل سنة.

وهذه الأرقام القياسية المتحركة – حسب تركيبها – عن طريقها نقارن أى ظاهرة فى أى فترة زمنية بنظيرتها فى الفترة السابقة لها مباشرة لأى تركيبة من تراكيب الأرقام القياسية السابقة.

فمن الجدول الآتى يمكن إعداد السلسلة المتحركة التالية:

جـــدول (١٦)

السـنـة	١٩٩٠	١٩٩٠	١٩٩١	١٩٩٢	١٩٩٣	١٩٩٥
السـعـر (ع)	٣٠٠ $(ع_٠)$	١٢٠ $(ع_١)$	١٥٠ $(ع_٢)$	١٧٠ $(ع_٣)$	٢٠٠ $(ع_٤)$	٣٠٠ $(ع_٥)$

سلسلة الأرقام القياسية للأسعار منسوب السعر لسلعة ما :

$$= \left(\frac{ع_١}{ع_٠} \times \frac{ع_٢}{ع_١} \times \frac{ع_٣}{ع_٢} \times \frac{ع_٤}{ع_٣} \times \frac{ع_٥}{ع_٤} \right) \times ١٠٠$$

فنحصل على سلسلة الأرقام $ع_{١٠}$ ، $ع_{٢١}$ ، $ع_{٣٢}$ ، $ع_{٤٣}$ ، $ع_{٥٤}$

$$= \left(\frac{١٢٠}{١٠٠} \times \frac{١٥٠}{١٢٠} \times \frac{١٧٠}{١٥٠} \times \frac{٢٠٠}{١٧٠} \times \frac{٣٠٠}{٢٠٠} \right) \times ١٠٠$$

= ١٢٠٪ ، ١٢٥٪ ، ١٢٦ ، ١١٧٦٪ ، ١٥٠٪

وبذلك يكون الأساس فى السلسلة السابقة متحركاً وليس ثابتاً :

ومعنى ذلك أن أسعار هذه السلعة

(١) زادت فى عام ٩١ عنه فى عام ٩٠ بنسبة ٢٠٪

(٢) زادت فى عام ٩٢ عنه فى عام ٩١ بنسبة ٢٥٪

(٣) زادت فى عام ٩٣ عنه فى عام ٩٢ بنسبة ٣٦٪

(٤) زادت فى عام ٩٤ عنه فى عام ٩٣ بنسبة ١٧,٥٪

(٥) زادت فى عام ٩٥ عنه فى عام ٩٤ بنسبة ٥٠٪

ويجب أن ننوه هنا أنه فى مثل هذه السلسلة السابقة، إذا أردنا أن تكون المقارنة للأسعار، مثلاً بين الأسعار فى فترة معينة والأسعار فى فترة سابقة تبعد عنها بفترات – أربع أو خمس سنوات مثلا – فما علينا إلى ضرب الأرقام القياسية المتتالية فى بعضها البعض حتى نصل إلى الفترة المطلوب المقارنة بها، وبذلك تتوافر فى الرقم القياسى المرونة والحركة، مع تغيير فترة الأساس من وقت لآخر – بطريقة غير مباشرة – كلما تغيرت الظروف، وبالطبع فإن المرونة السابقة لا تتوافر فى الأرقام القياسية ذات الأساس الثابت السابق لنا دراستها فى الأجزاء الأولى من هذا الفصل.

فمثلا من الجدول السابق إذا أردنا مقارنة أسعار هذه السلعة فى سنة ١٩٩٥ بالنسبة لسنة ١٩٩١ كأساس فإن ذلك يتم كما يلى :

$$= \left(\frac{١٥٠}{١٢٠} \times \frac{١٧٠}{١٥٠} \times \frac{٢٠٠}{١٧٠} \times \frac{٣٠٠}{٢٠٠}\right) \times ١٠٠ = \frac{٣٠٠}{١٢٠} \times ١٠٠ = ٢٥٠$$

أى أن الأسعار عام ١٩٩٥ زادت عن نظيرتها فى عام ١٩٩١ كأساس نسبة ١٥٠ ٪.

وعليه فإنه إذا أردنا إيجاد منسوب السعر فى السنة النونية (ن) منسوباً إلى منسوب السعر للسنة (٣) مثلاً فإن :

$$م_{ن:٣} = \frac{ع_{ن}}{ع_{٣}} \times ١٠٠$$

أى منسوب السعر فى السنة (ن) بالنسبة لمنسوب السعر فى السنة الثالثة.

$$= \left(\frac{ع_{ن}}{ع_{ن-١}} \times \frac{ع_{ن-١}}{ع_{ن-٢}} \times \cdots \times \frac{ع_{٥}}{ع_{٤}} \times \frac{ع_{٤}}{ع_{٣}}\right) \times ١٠٠$$

ويطلق على هذه الخاصية (بالخاصية الدورية) وهذه الخاصية تنطبق على الأرقام القياسية البسيطة فقط بعكس الأرقام القياسية المرجحة فلا تنطبق عليها خاصية الدورية (*).

(*) الا إذا كانت الترجيحات بالكميات متساوية أى أن :

$$ك_{١} = ك_{٢} = ك_{٣} = \cdots = ك_{ن}$$

مميزات الرقم القياسى المتحرك:

١ - إمكانية تكييف تركيب أى رقم قياسى بما يتلاءم مع حالته فى كل سنة من حيث :

(أ) إدخال أو إضافة سلع جديدة، أو حذف سلع قديمة طبقاً لعظم أو قلة شأنها فى السوق.

(ب) تعديل الأهمية النسبية بين السلع الداخلة فى تركيب الرقم القياسى المتحرك بما يتناسب مع ظروفها فى كل سنة، وبمعنى آخر إمكانية أخذ التغيرات الأساسية فى الإنتاج والتوزيع والانماط الإستهلاكية فى الإعتبار لمثل هذه الأرقام القياسية المتحركة.

٢ - المرونة التى تتصف بها الأرقام القياسية المتحركة، بما ينعكس على اعطاء مقارنات دقيقة للتغيرات من سنة لأخرى بعكس الأرقام القياسية ذات الأساس الثابت حيث يتم فيها الترجيح بأوزان ثابتة طوال السنين للسلسلة مما لا يتمشى مع الظروف المحيطة بالسلع الداخلة فى تركيب الرقم القياسى الثابت.

تمـــارين (٨)

(١) فيما يلى بيان بأسعار وكميات السلع أ ، ب ، حـ فى السنوات ١٩٩٠، ١٩٩٥.

السلعة	١٩٩٠		١٩٩٥	
	السعر	الكمية	السعر	الكمية
أ	١٠٠	٦٠	١٢٠	٧٠
ب	١٢٠	٨٠	١٠٠	٩٠
حـ	١٥٠	١٠٠	٢٠٠	١٢٠

المطلوب : حساب الأرقام القياسية التالية :

١ – الرقم القياسى التجميعى البسيط للأسعار.

٢ – رقم باشى للأسعار .

٣ – رقم فيشر للكميات.

٢ – (أ) بمعلومية البيانات التالية إحسب كل من الأرقام القياسية التالية للاسبير، ومارشال وأدجوارث ، وباشى، وفيشر، للأسعاروالكميات.

السلعة	فترة المقارنة		فترة الأساس	
	ك	ع	ك	ع
أ	١٥٠٠٠	٧٠	١٢٠٠٠	٦٠
ب	٤٥٠٠٠	٣٠	٤٠٠٠٠	٢٠
حـ	٢٥٠٠٠	٢٠	٢٠٠٠٠	١٠
د	٢٠٠٠٠	١٠	١٠٠٠٠	٥

(ب) إختبر الأرقام القياسية السابقة فى الانعكاس فى الزمن والأنعكاس فى المعامل.

٣ – إحسب الرقم القياسى الأمثل لفيشر (أسعار ، وكميات) من البيانات التالية:

السلعة	ع.	ع١	ك.	ك١
أ	٢	٥	١٠	١٢
ب	٣	٦	٨	٦
حـ	٥	٨	٢	٣

٤ – بمعلومية البيانات السابقة فى (٣) إحسب كل من :

(أ) الرقم القياسى للاسبير للاسعار والكميات ٢ – الرقم القياسى لباشى للأسعار . ٣ – الرقم القياسى لمارشال وإدچوارث للأسعار .

السلع	$ك_٠$	$ع_٠$	$ك_١$	$ع_١$
أ	١٠٠٠٠	٧٠	١٢٠٠٠	٨٠
ب	٣٠٠٠٠	٣٠	٤٠٠٠٠	٤٠
حـ	١٥٠٠٠	٢٠	٢٠٠٠٠	٣٠
د	٢٠٠٠٠	١٠	٣٠٠٠٠	١٥

(ب) إختبر الأرقام القياسية السابقة فى الانعكاس فى الزمن والأنعكاس فى المعامل.

٥ – إحسب الأرقام القياسية للمناسيب المرجحة للأسعار والكميات: فى التمرين رقم (١) ، والتمرين رقم (٢) السابقين:

٦ – فيما يلى أسعار وكميات ثلاث سلع فى عامى ١٩٩٠ ، ١٩٩٥.

السلعة	١٩٩٠		١٩٩٥	
	$ع_٠$	$ك_٠$	$ع_١$	$ك_١$
أ	٣٠	١٠	٤٠	١٥
ب	٧٠	٢٠	١٠٠	٣٠
حـ	١١٠	٨٠	١٥٠	١٠٠

إحسب كل من :

١ – الوسط الحسابى البسيط لمناسيب الأسعار ومناسيب الكميات .

٢ – الوسط الهندسى البسيط لمناسيب الأسعار ومناسيب الكميات.

٧ – (أ) احسب كل من الأرقام القياسية لمناسيب الأسعار المرجحة فى التمرين رقم (٦) السابق بإستخدام الرقم القياسى المرجح للمناسيب بإستخدام كافة الترجيحات المختلفة الممكنة.

(ب) إختبر الأرقام القياسية التى حصلت عليها من حيث الأنعكاس فى الزمن والأنعكاس فى المعامل.

٨ – فيما يلى بيان بعدد العمال ومتوسط الأجور الشهرية بالجنيه فى ثلاث مناطق (أ ، ب ، حـ) فى عامى ١٩٩٠ ، ١٩٩٥ على التوالى:

المنطقة	متوسط الأجور الشهرية		عدد العمال	
	١٩٩٠	١٩٩٥	١٩٩٠	١٩٩٥
أ	٢٥٠	٤٥٠	٩٠٠٠	١٤٠٠٠
ب	٣٠٠	٥٥٠	١٠٠٠	١٥٠٠
حـ	٤٠٠	٧٠٠	٤١٠٠	٤٥٠٠

والمطلوب :

١ – تكوين رقما قياسياً للأجور باستخدام الرقم القياسى لباشى.

٢ – تكوين رقما قياسياً للأجور باستخدام الرقم القياسى للاسبير.

٣ – إستنتاج رقم فيشر للأجور.

٤ – ما هو أفضل الأرقام السابقة ؟ ولماذا ؟

٩ – الجدول الآتى يبين منسوب السعر لإحدى السلع فى السنوات ١٩٩٠ حتى ١٩٩٥ باعتبار سنة الأساس (١٩٩٠) وبأساس متحرك (أى رقم متسلسل) والمطلوب استكمال بيانات هذا الجدول.

السنة	منسوب السعر	
	١٩٩٠ = ١٠٠	أساس متحرك
١٩٩٠	١٠٠	١٠١
١٩٩١	١٠٦	$س_٣$
١٩٩٢	$س_١$	١٠٢
١٩٩٣	١١٢	$س_٤$
١٩٩٤	١١٤	$س_٥$
١٩٩٥	$س_١$	١٠٥

الفصل العاشر

السلاسل الزمنية (TIME SERIES)

تحليلها وقياس مكوناتها

مقدمة :

أولاً : نلاحظ ظواهر كثيرة فى حياتنا ذات علاقة بالزمن سواء تعلق الأمر بظواهر تجارية وإقتصادية أو بغيرها من الظواهر المختلفة،فمن الملاحظ حدوث تغير فى المؤشرات الاقتصادية والتجارية للمؤسسات التجارية والدول عبر الزمن، فيحدث تغير فى مستوى الإنتاج سواء أكان صناعياً أو زراعياًأو للصادرات أو للواردات أو لفائض الميزان التجارى، أو فى ميزان المدفوعات ... الخ ، لأحدى الدول أو لمجموعة الدول من سنة لأخرى بمرور الزمن ، وهكذا الأمر بالنسبة للمؤسسات التجارية المختلفة ، فيختلف مستوى نشاطها الإنتاجى ، والبيعى وصافى دخلها من سنة لأخرى أى بمرور الزمن.

فإذا أمكننا ترتيب قيم ظاهرة ما أو مجموعة من الظواهر السابقة وفقاً لزمن حدوثها نتج لنا سلسلة زمنية لمثل هذه الظاهرة أو مجموعة هذه الظواهر، ويفضل أن يتم الترتيب السابق وفقاً لفترات زمنية متساوية قد تكون يوماً أو أسبوعاً أو شهرا أو ربع سنة أو نصف سنة أو سنة على حسب طبيعة الظاهرة والتغير فيها، وعليه يمكن تعريف السلسلة الزمنية لأى ظاهرة بأنها ، مجموعة البيانات أو القيم لمثل هذه الظاهرة مرتبة تتباعياً حسب أزمنة حدوث هذه الظاهرة لمدة محددة على فترات زمنية متساوية ، وعليه فإن

أى سلسلة زمنية تحتوى على متغيرين أولهما الزمن وليكن (س مثلاً وهو المتغير المستقبل) ، والآخر هو قيمة الظاهرة وليكن (ص مثلاً وهو المتغير التابع) .

وعليه فيمكن أن نشير إلى بيانات أو قيم الظاهرة بالرمز (ص) أى قيم السلسلة محل الدراسة بالترتيب بالقيم $ص_{١}$ ، $ص_{٢}$ ، $ص_{٣}$ ، ... $ص_{ى}$ ، ... $ص_{ن}$ يقابلها الأزمنة $س_{١}$ ، $س_{٢}$ ، $س_{٣}$ ، ... ، $س_{ى}$ ، ... ، $س_{ن}$ بنفس الترتيب.

وتنشر الأجهزة الاحصائية المختصة فى كثير من الدول سواء على مستوى هذه الدول أو على مستوى المؤسسات بها سلاسل زمنية لأرقام ظواهر مختلفة عن مدد محددة فى الماضى ومن أمثلتها على سبيل المثال لا الحصر.

١ – السلاسل الزمنية لأرقام الدخل القومى خلال مدة محددة .

٢ – السلاسل الزمنية لأرقام معدلات الزيادة فى الإنتاج أى كان نوعه خلال مدة محددة.

٣ – السلاسل الزمنية لأرقام متوسط الدخل الفردى للسكان خلال مدة محددة.

٤ – السلاسل الزمنية لأرقام الصادرات أو الواردات ككل أو على حسب السلعة أو الخدمة – خلال مدة محددة.

٥ – السلاسل الزمنية لأرقام عدد السكان – ككل أو على حسب النوع.. الخ خلال مدة محددة.

٦ – السلاسل الزمنية لأرقام المواليد – ككل أو على حسب النوع – خلال مدة محددة

٧ – السلاسل الزمنية لأرقام الوفيات – ككل أو على حسب النوع – خلال مدة محددة.

٨ – السلاسل الزمنية لأرقام طلبة المدارس أو الجامعات خلال مدة محددة.

٩ – السلاسل الزمنية لأرقام خريجى الجامعات ككل أو على حسب الكليات خلال مدة محددة.

١٠ – السلاسل الزمنية لأرقام البطالة خلال مدة محددة.

١١ – السلاسل الزمنية لعدد المبانى السكنية وفقاً لمستوياتها خلال مدة محددة.

١٢ – السلاسل الزمنية سنوياً أو فصلياً أو شهرياً لمبيعات المحلات – ككل أو حسب الصنف – خلال مدة محددة.

١٣ – السلاسل الزمنية لأرقام للإنتاج الصناعى لأهم المؤسسات خلال مدة محددة.

١٤ – السلاسل الزمنية لأسعار الأسهم المختلفة والتغيرات الدورية لهذه الاسعار خلال مدة محددة.

١٥ – السلاسل الزمنية للأرقام القياسية لنفقة المعيشة – ككل أو فى الحضر أو الريف – خلال مدة محددة.

ثانياً : إن التخطيط والرقابة واتخاذ القرارات السليمة من أهم المتطلبات على مستوى الدول أو المناطق أو الإدارة العليا بأى مؤسسة سواء أكانت تجارية أو خدمية ولا يتأتى ذلك إلا بالتنبؤ بالمستقبل فى كافة النشاطات فى المجالات المختلفة.

ومما لا شك أنه بالإمكان الاستدلال حول مستقبل ظاهرة ما أو عدة ظواهر بناء على ما حدث لها فى الماضى أو يحدث لها فى الحاضر باستخدام أساليب الانحدار مثلاً وبعض الأساليب الأخرى للحصول على تقدير مثل هذه الظواهر فى المستقبل.

ثالثاً : « يعتبر تحليل السلاسل الزمنية من أهم أساليب الاستدلال الاحصائى حول المستقبل بناء على أحداث الماضى والحاضر حيث تبين السلسلة الزمنية التغير الذى يحدث فى قيم ظاهرة ما كدالة فى الزمن ».

وعليه فالتحليل الاحصائى للسلاسل الزمنية المختلفة يؤدى إلى:

١ – تحديد ماهية التغيرات السابقة والحاضرة فى سلسلة زمنية محددة.

٢ – تحديد السلوك – أو توصف المجرى – لبيانات الظاهرة موضوع الدراسة ثم قياس التغيرات المختلفة بفعل المؤثرات أو المكونات المختلفة على أو لهذه الظاهرة وهو هدف وصفى يمكن عن طريقة تفسير واستنباط أثر بعض العوامل التاريخية على سلوك الظاهرة محل الدراسة.

٣ – الاستفادة من تحديد السلوك والتغيرات المختلفة للمؤثرات أو المكونات المختلفة للظاهرة السابقة – بفرض التشابه فى التنبؤ التجريبى للظروف التى سادت فى الماضى – بما يمكن أن تكون عليه قيم هذه

الظاهرة فى المستقبل أو فى سنوات أو الأزمنة فى الماضى ليس لدينا عنها بيان فى بعض الأحيان.

وعلى سبيل المثال يمكن الاستفادة من تحليل السلاسل الزمنية فى المجال التجارى والاقتصادى بالتنبؤ فى مجالات الإنتاج والمبيعات فى أى صناعة من حيث القيم أ والأسعار النهائية أو أسعار المواد الخام ، أو المواد نصف المصنعة ... الخ، حيث يتم إستخدام التنبؤات السابقة فى مجالات تحديد الميزانيات التقديريه وتحديد سياسات الإنتاج والسياسات البيعية، وسياسات التمويل وسياسات العمالة، والسياسات المحاسبية فى المؤسسات التى تأخذ تحليل مثل هذه السلاسل الزمنية – كأسلوب مساعد فى التخطيط والرقابة بها (*).

٤ – تحديد وفصل قيم المؤثرات أو المكونات المختلفة على السلسلة الزمنية سواء فى الماضى أو الحاضر أو المستقبل.

رابعاً : يمكن تمثيل أى سلسلة زمنية بيانياً – أى كان نوعها – وذلك بتحديد الزمن (س) على المحور الأفقى – بمقياس رسم معين – وبيانات أو قيم الظاهرة (ص) على المحور الرأسى – بمقياس رسم آخر – وبعد تحديد إحداثيات النقاط المختلفة لقيم السلسلة الزمنية يمكننا أن نصلها بمنحنى باليد فنحصل على ما يطلق عليه ، بالمنحنى التاريخى للسلسلة الزمنية ، وهو أمر هام بالنسبة لأى سلسلة زمنية نهدف التعرف على الشكل العام التاريخى لسلوك هذه الظاهرة وقد يكون هذا المنحنى فى شكل مستقيم أو شبه مستقيم أو منحنى من الدرجة الثانية أو درجات أعلى من

(*) إن دراسة تحليل السلاسل الزمنية ستفيد الدارس فى مجالات العلوم الإدارية، والمحاسبية والاقتصادية المختلفة.

ذلك لأنه إذا أظهرت سلسلة زمنية لظاهرة ما إتجاهاً عاماً محدداً خلال فترة زمنية طويلة نسبياً من الزمن، فمن المتوقع أن يستمر حدوث هذا الاتجاه العام فى المستقبل أيضاً خصوصاً فى المستقبل القريب نسبياً ويعتبر احتمال إستمرار الاتجاه العام للسلسلة الزمنية للظاهرة فى المستقبل أساساً معقولاً للتنبؤ.

ويتضح لنا ما سبق من المثال التالى :

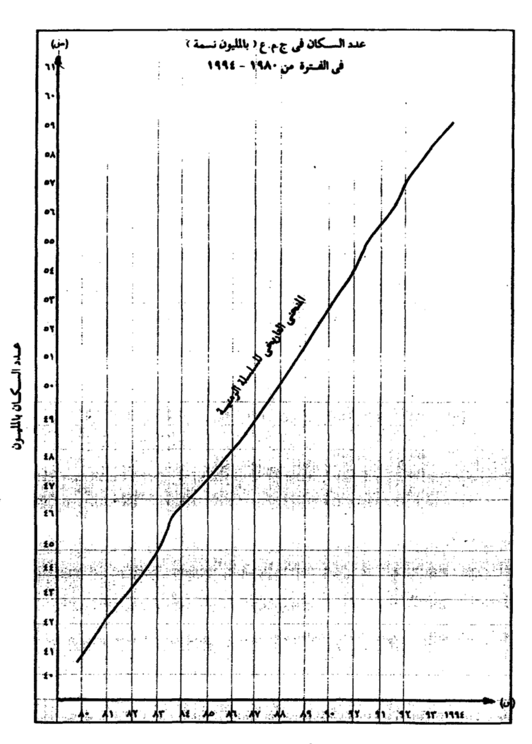
مثـــال (١) فيما يلى تقديرات عدد السكان فى منتصف العام فى ج٠م٠ع خلال المدة من ١٩٨٠ – ١٩٩٤

جــدول (١٧) (بالألف نسمة)

السنوات (س)	١٩٨٠	١٩٨١	١٩٨٢	١٩٨٣	١٩٨٤	١٩٨٥	١٩٨٦	١٩٨٧	١٩٨٨	١٩٨٩	١٩٩٠	١٩٩١	١٩٩٢	١٩٩٣	١٩٩٤
عدد السكان (ص)	٤٢١٢٦	٤٣٣٢٢	٤٤٥٠٦	٤٥٧٢١	٤٦٩٩٠	٤٨٣٤٩	٤٩٩١٢	٥١٣٦٨	٥٢٨٧٦	٥٤٢٥٩	٥٥٦٣٥	٥٦٩٢٢	٥٨٣١١	٥٩٥٦٣	٦٠٩٠٩

المصـــدر: الكتاب الإحصائى السنوى يونيو ١٩٩٥ .

والمطلوب : تحديد المنحنى التاريخى لهذه السلسلة الزمنية.



السنوات

الشكل رقم (٤٢)

وبالطبع فإن الاتجاة العام لهذه السلسلة هو الزيادة في عدد السكان، وعليه نتوقع زيادة في السكان في ج٠م٠ج خلال الفترة القادمة حتى سنة ٢٠٠٠ مثلاًويمكن حساب الزيادات السنوات حتى هذا التاريخ باستخدام بيانات السلسلة الزمنية السابقة ، وهكذا الأمر بالنسبة لكافة السلاسل الزمنية للظواهر الأخرى.

ومما تجدر الاشارة إليه هنا قبل الدخول في مكونات السلسلة الزمنية وتحليلها، أن نشير إلى ما يلي :

١ – إن مستوى التغير في نقطة زمنية بسلسلة زمنية لا تعتمد على مستوى التغير في نقطة زمنية سابقة بنفس السلسلة الزمنية بصفة مطلقة، ذلك لأن قيم الظاهرة (ص) ليست مستقلة تماماً عن بعضها البعض تمام الإستقلال، حيث أن قيمة الظاهرة في أى نقطة زمنية هي حصيلة لتفاعل مؤثرات أو متغيرات متعددة اقتصادية واجتماعية ونفسية وأخرى من ناحية، بجانب اختلاف الأهمية النسبية لكل مؤثر منها عبر الزمن في قيمة الظاهرة في هذه النقطة من ناحية أخرى، ومن أمثلة هذه المؤثرات تغير كل من عدد السكان والناتج القومي الإجمالي، والتطور التكنولوچي، وأذواق المستهلكين، والسياسات الحكومية، والعلاقات الدولية، والطقس أو الجو، والعادات والتقاليد، والأعياد والمواسم، والحروب، والثورات، والفياضانات، والأوبئة والزلازل ... الخ.

ونظراً لصعوبة قياس أثر كل عامل من المؤثرات السابقة في سلوك الظاهرة أو السلسلة الزمنية موضوع القياس لصعوبته في بعض الأحيان ولاستحالته في أحيان أخرى، لكل ذلك فإننا نلجأ إلى افتراض مؤداه أن قيم المتغير ص دالة في الزمن أى

ص = د (س)

وهذا يعنى أننا نعتبر الزمن (س) هو المتغير المستقل الوحيد والذى يمثل المحصلة النهائية لتأثير العوامل الكثيرة الأخرى على الظاهرة موضوع البحث .

٢ – إن درجة الخطأ فى التنبؤ عكسية مع طول فترة التنبؤ، وبمعنى آخر تزداد درجة دقة التنبؤ بقصر الفترة المستقبلية للتنبؤ والعكس صحيح وعليه فإن درجة التنبؤ لسنة قادمة أكثر دقة من درجة التنبؤ لخمس سنوات قادمة.

ومن ناحية أخرى فإن درجة الدقة فى التنبؤ طردية مع طول الفترة الزمنية للسلسلة الزمنية، أى أنه كلما طالت الفترة الزمنية لسنوات السلسلة الزمنية كلما زادت دقة التنبؤ والعكس صحيح.

لذا فإن المدة الزمنية لأى سلسلة زمنية يجب الا تقل عن ٦ فترات زمنية.

وفى كافة الأحوال فإن التنبؤ الذى يتم فى فترات يسودها كل من الثبات والاستقرار بالنسبة للظاهرة موضوع الدراسة يكون أكثر دقة من التنبؤ الذى يتم فى فترات لا يسودها هذا الاستقرار.

مكونـات (Components)
السلسلة الزمنيـة وتحليلهـا

أن التحليل الاحصائى لأى سلسلة زمنية يعنى:

١ – تفكيكها إلى مكوناتها الأساسية المؤثرة على سلوك بيانات أو قيم هذه السلسلة الزمنية وقد أمكن تصنيف تحركات أى سلسلة زمنية فى أربعة متغيرات هى :

(أ) تغيرات الاتجاه العام

(ب) التغيرات الموسمية.

(حـ) التغيرات العشوائية (العرضية).

(د) التغيرات الدورية.

٢ – دراسة أساليب قياس التغيرات المختلفة التى تتضمها السلسلة الزمنية وطرق فصل تأثير كل مكون منها عن باقى مكونات السلسلة وذلك للتعرف على التغيرات التى تتبع كل مكون منها من حيث طبيعته ومقداره واتجاهه ... الخ.

٣ – دراسة وفحص بعض طرق التنبؤ باستخدام السلاسل الزمنية حيث أن الهدف من تحليل سلوك أى سلسلة زمنية هو إستخدامه فى التنبؤ بقيم كل مكون فى المستقبل.

٤ – تحديد نموذج السلسلة الزمنيـة (Time Series model) وذلك يعنى تحديد لعلاقة السلسلة بمكوناتها الرئيسية عند نقطة معينة وليكن (ن) سواء بالنسبة للإتجاه العام ($ت_{ن}$) أو للمتغير العشوائى، ($ع_{ن}$) أو للمتغير الموسمى ($م_{ن}$) أو المتغير الدورى ($د_{ن}$)،وهناك نموذجين يستخدمان فى

هذا المجال كتقريب جيد للعلاقة بين مكونات السلسلة الزمنية التى تظهرها البيانات.

أولهما : نموذج حاصل الجمع (Additive model) وهو يفترض أن القيمة الأصلية للسلسلة هى حاصل جمع المكونات الأربعة المكونة للسلسلة

أى أن: $ص = ت_ن + م_ن + د_ن + ع_ن$ .. .. (١)

وثانيهما : نموذج حاصل الضرب (Multiplication model)

ويفترض أن القيمة الأصلية للسلسلة الزمنية هى حاصل ضرب مكوناتها الأربعة أى أن:

$ص = ت_ن \times م_ن \times د_ن \times ع_ن$ .. .. (٢)

والنموذج الثانى هو النموذج شائع الإستخدام، ذلك لأنه يعطى لكل مكون من المكونات الأربعة أهميته النسبية بجانب سهوله تطبيقه عن النموذج الأول.

كما أن فى النموذج الثانى للسلسلة الزمنية، يتم التعبير عن مكون الاتجاه العام فى صورة قيمة عددية أى بوحدات البيانات الأصلية، بينما يتم التعبير عن كل مكون من المكونات الأخرى للسلسلة الزمنية – التغيرات الموسمية والدورية والعشوائية – فى صورة نسب مئوية تزيد أو تنقص عن قيمتها المتوسطة أى ١٠٠ ٪.

كما يجب أن نشير بالنسبة لنموذج حاصل الضرب السابق أن :

* هناك تبعية متبادلة بمعناها الجبرى بين مكونات السلسلة الزمنية، أى أن الذبذبات الموسمية والدورية تعتبر دالة فى ذبذبات الإتجاه العام.

* بملاحظة أثر قيم الاتجاه العام على التغيرات الموسمية والتغيرات الدورية فى هذا النموذج ، نجد أن نسبة الموسمية إلى الاتجاه العام تبقى ثابتة ، وهذا يعنى أن القيم الموسمية إلى الاتجاه العام تبقى ثابتة، وهذا يعنى أن القيم الموسمية تزداد كلما إزدات قيم الاتجاه العام ، ويحدث نفس الأمر السابق بالنسبة للتغيرات الدورية.

ونخلص من كل ما سبق أن الغرض من تحليل السلاسل الزمنية هو قياس التغيرات الخاصة بمكونات هذه السلسلة الأربعة، حيث أن القياس السابق يتيح لنا فرصة معرفة مقدار كل منها واتجاهه وأثر كل منها على الظاهرة المراد تحليلها وينعكس ما سبق فى إمكانية :

١ – الوصول إلى نموذج يوضح تحركات الظاهرة موضوع القياس.

٢ – إستخدام النموذج السابق فى التنبؤ بأثر كل من الاتجاه العام والتغيرات الموسمية، والتغيرات الدورية كل على حده.

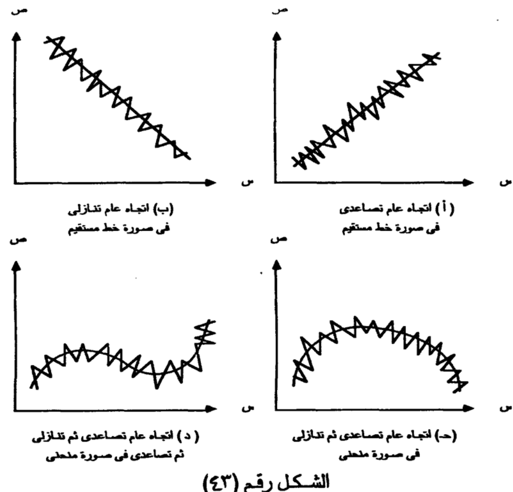
(أ) تغيرات الاتجاه العام ($ت_ن$) Secular Trend :

أولاً : مقدمة وتعاريف:

بملاحظة المنحنى التاريخى لأى ظاهرة نجد أن هناك ذبذبات فى هذا المنحنى من فترة زمنية لأخرى، لكن ما يعنينا فى الاتجاه العام هو التغيرات التدريجية فى الأجل الطويل فى إتجاه معين (أعلى أو أسفل) ، فهناك بعض الظواهر ما يتزايد بطبيعته على مدار الزمن وليكن سنوياً (كالناتج القومى، وعدد السكان فى كثير من الدول النامية، وعدد

الطلبة، وإنتاج السيارات، والأجهزة الكهربائية، وإستهلاك الكهرباء ، عدد المدخنين ... الخ) ، وفيها يكون الاتجاه العام للظاهرة فى الأجل الطويل تصاعدياً أى اتجاه موجب، فى حين هناك بعض الظواهر ما يتناقص بطبيعته على مدار الزمن وليكن سنوياً (كإستخدام الفحم فى التدفئة، وإقتناء (أو تصنيع) السلع الآخذة فى الانقراض بفضل التجديد واختراع سلع أخرى بديلة، كالتليفزيونات غير الملونة، وإستخدام ألآت ومعدات الفرز والتثقيب اليدوية فى الأعمال الإحصائية، .. الخ) وفيها يكون الإتجاه العام للظاهرة فى الأجل الطويل تنازلياً أى إتجاه سالب.

ومما لا شك فيه أن الاتجاه العام يعتمد بالدرجة الأولى على درجه النمو للظاهرة موضوع الدراسة وإتجاهها على مدار فترة طويلة من الزمن طولها ست سنوات على الأقل، فإذا أحدث وغيرت هذه الظاهرة إتجاهها وهنا يتغير سلوك الظاهرة ومن ثم يستمر السلوك الجديد للظاهرة مدة طويلة أيضاً، كل ذلك إنعكاساً للعوامل الاقتصادية والتقنية والديموجرافية المحيطة بالظاهرة، وعادة ما يتم تمثيل الاتجاه العام بيانياً بخط مستقيم أو فى صورة منحنى، حيث لا يخرج تمثيل الاتجاه العام للسلسلة الزمنية فى غالب الأحوال عن أحد الأشكال التالية :



(ب) اتجاه عام تنازلى في صورة خط مستقيم

(أ) اتجاه عام تصاعدى في صورة خط مستقيم

(د) اتجاه عام تصاعدى ثم تنازلى ثم تصاعدى في صورة منحنى

(حـ) اتجاه عام تصاعدى ثم تنازلى في صورة منحنى

الشكل رقم (٤٣)

ثانياً : طرق قياس الاتجاه العام :

ويوجد عديد من الطرق لتقدير الإتجاه العام للظواهر المختلفة، تختلف كل منها عن الأخرى من حيث طبيعتها ومدى دقتها في التقدير ومدى مرونة إستخدامها في التنبؤ (*) . نتناولها فيما يلى :

(*) إن عدم إستقلالية المشاهدات ستؤدى إلى عدم دقة التقديرات بإستخدام طريقة المربعات الصغرى، لهذا إذا كانت قيم (ص) غير مستقلة عن بعضها البعض في مثل هذه الحالة فإن إستخدام الاتجاه العام كأسلوب للتنبؤ في المستقبل يجب أن يؤخذ بالحيطة والحذر.

١ - طريقـة التمهيـد باليد The Free Hand method :

وتقوم هذه الطريقة على تمثيل الظاهرة بيانياً فى صورة منحنى تاريخى للسلسلة الزمنية – أى البيانات الأصلية – كما جاء فى المثال رقم (١) السابق.

ثم نقوم باليد بالحصول على خط مستقيم مناسب،أو منحنى مناسب فوق المنحنى التاريخى للظاهرة، مع مراعاة أى تكون الانحرافات الموجبة مساوية أو قريبة للانحرافات السالبة لخط أو منحنى الاتجاه العام عن المنحنى التاريخى للظاهرة.

ورغم سهولة وبساطة هذه الطريقة فإن ما يعيبها أنها تعتمد على التقدير الشخصى للباحث فى توفيق خط الاتجاه العام، والإجراء الأخير يختلف من باحث لآخر وبالتالى فإن التقدير أو التنبؤ بإستخدام هذه الطريقة سيختلف من باحث لأخر، أى أن هذه الطريقة تكون شخصية وليست موضوعية ، ومن ثم يقتصر تطبيقها على بعض المجالات التجارية حيث يكتفى بالحصول على تقديرات تقريبية تؤدى الغرض منها.

مثـال (٢) :

فيما يلى بيان بمبيعات إحدى الشركات بملايين الجنيهات سنوياً خلال المدة من ١٩٨٦ – ١٩٩٦.

جـــــدول (١٨) (بالمليون جنيه)

السنة	١٩٨٦	١٩٨٧	١٩٨٨	١٩٨٩	١٩٩٠	١٩٩١	١٩٩٢	١٩٩٣	١٩٩٤	١٩٩٥	١٩٩٦
قيمة المبيعات	٣	٣	٨	٩	٦	٧	١٢	١٣	١٠	١١	١٦

والمطلوب : ١ - توفيق خط الاتجاه العام خلال سنوات السلسلة الزمنية .

٢ - تحديد معادلة الاتجاة العام.

٣ - التنبؤ بقيمة المبيعات لهذه الشركة عام ٢٠٠٠.

الحـل : نقوم برسم المنحنى التاريخى لقيم المبيعات كما جاء بالصفحة البيانية التالية:

١ - تمهد أفضل خط مستقيم وليكن فى اعتقادنا الخط ق ل (وهو خط مستقيم).

٢ - لتحديد معادلة الاتجاه العام وهى معادلة من الدرجة الأولى حيث القيمة الاتجاهية للظاهرة صْ = أ س + ب حيث صْ القيمة الاتجاهية للظاهرة ، أ ميل الخط المستقيم، ب (الجزء المقطوع من محور الصادرات)؛:

وحيث أ بصفة تقريبية = ظل الزاوية أى (ظا ى)

$$= \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{\text{أ حـ}}{\text{ى حـ}} = \frac{٢,٦}{٢,٥}$$

= ١,٠٤

، ب = و ق = ٣ (كما جاء بالصفحة التالية)

وعليه فإن : معادلة الخط المستقيم (الاتجاه العام) .

صْ = ١,٠٤ س + ٣

٣ - للتنبؤ بقية المبيعات للشركة عام ٢٠٠٠

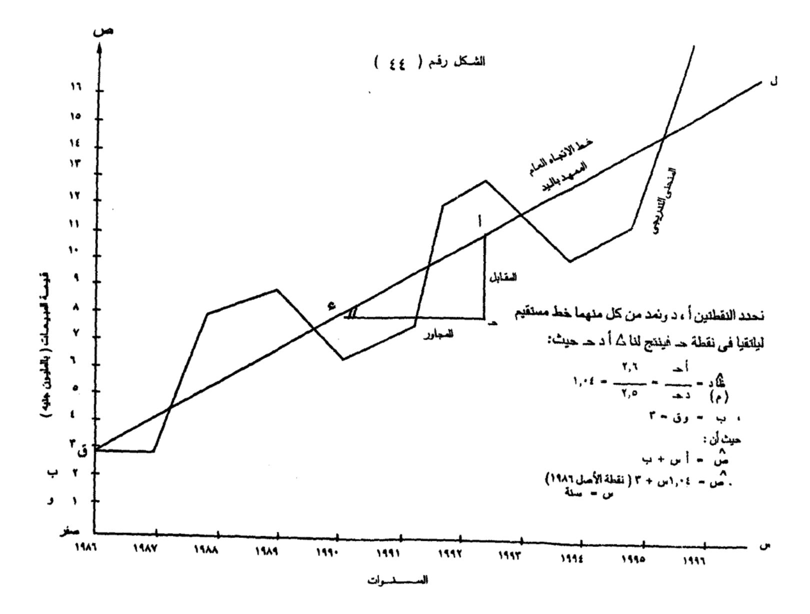
نحدد أولا قيمة س = (سنة التنبؤ - سنة الأساس (١٩٨٦) للسلسلة

= (٢٠٠٠ - ١٩٨٦ = ١٤ سنة)

ثم نتنبأ بقية المبيعات من معادلة الاتجاه العام

$\hat{ص}_{٢٠٠٠}$ = ١,٠٤ (١٤) + ٣

= ١٤,٥٦ + ٣ = ١٧,٥٦ مليون جنيه.



الشكل رقم (٤٤)

نحدد النقطتين أ ، د ونمد من كل منهما خط مستقيم ليلتقيا في نقطة حـ فينتج لنا △ أ د حـ حيث:

ظا د = أحـ / د حـ = ٢,٦ / ٢,٥ = ١,٠٤ (م)

، ب = وق = ٣

حيث أن :

ص^ = أ س + ب

∴ ص^ = ١,٠٤س + ٣ (نقطة الأصل ١٩٨٦)

س = سنة

٢ - طريقة اشباه المتوسطات : The methed of Semi average :

ويطلق البعض على هذه الطريقة بطريقة متوسطى نصفى السلسلة حيث يتم فيها تقسيم بيانات أو قيم السلسلة الزمنية إلى جزئين متساويين، ثم نقوم بإيجاد متوسط كل جزء من الجزئيين السابقين ومن ثم الحصول على نقطتين، ويمكن الاكتفاء بنقطتى المتوسطين السابقين وبايصال خط مستقيم بينهما وهو الذى يحدد خط الاتجاه العام – بدلاً من مجموعة نقاط السلسلة الزمنية من حيث القيم والزمن كما جاء فى طريقة التمهيد باليد السابقة ومن ثم تحديد القيم الإتجاهية للظاهرة بتحديد معادلة خط الإتجاه العام لها كما يلى :

١ ـ حيث أن الخط المستقيم الذى يمر بالوسطين المذكورين يمثل خط الاتجاه العام .

٢ ـ من الممكن إيجاد معادلة خط مستقيم بمعلوميه نقطتين عليه

ص = أ س +ب

$$\text{حيث أ (ميل الخط المستقيم)} = \frac{\text{فرق الاحداثيات الصادية}}{\text{فرق الاحداثيات السينية}}$$

$$\text{أى أن أ} = \frac{\text{الفرق بين الوسطين الحسابين}}{\text{الفرق بين زمنيهما}}$$

٣ – أما قيمة (ب) فتحدد بقية كل من المتوسطين لجزئى السلسلة الزمنية السابقين وهى تختلف باختلاف نقطة الأصل لكل معادلة، وعليه فيكون لدينا معادلتين اتجاهتين سنة الأساس لكل منهما مختلفة عن الأخرى كما يتضح من المثال التالى :

مثال (٣) بفرض أنه فى المثال رقم (٢) أخذت بيانات السلسلة لعشرة سنوات فقط عن الفترة من ٨٧ – ١٩٩٦ فأحسب معادلتى الاتجاه العام ، ثم تنبأ بقيمة المبيعات لهذه الشركة عام ٢٠٠٠ بإستخدام طريقة أشباه المتوسطات.

الحـل :

١ -

السنة (س)	قيمة المبيعات (بالمليون جنيه) (ص)
١٩٨٧	٣
١٩٨٨	٨
١٩٨٩	٩
١٩٩٠	٦
١٩٩١	٧
١٩٩٢	١٢
١٩٩٣	١٣
١٩٩٤	١٠
١٩٩٥	١١
١٩٩٦	١٦

النصف الأول

$$\bar{ص}_{١} = \frac{مجـ ص_{١}}{ن_{١}} = \frac{٣٣}{٥} = ٦,٦$$

النصف الثانى

$$\bar{ص}_{٢} = \frac{مجـ ص_{٢}}{ن_{٢}} = \frac{٦٢}{٥} = ١٢,٤$$

٢ - حـيث يقع المتـوسط الأول ($\bar{ص}_{١}$) أمام السنة المتوسطة فـى النصف الأول للسلسلة أى أمـام عام ١٩٨٩ ، بينما يقع المتوسط الثانى ($\bar{ص}_{٢}$) أمام السنة المتوسطة فى النصف الثانى للسلسلة أى أمام عام ١٩٩٤ .

$$\text{قيمة الميل } (أ) = \frac{\text{الفرق بين المتوسطين}}{\text{الفرق بين سنتيهما}}$$

$$= \frac{\bar{ص}_{٢} - \bar{ص}_{١}}{س_{٢} - س_{١}}$$

$$= \frac{١٢,٤ - ٦,٦}{١٩٩٤ - ١٩٨٩}$$

$$= \frac{٥,٨}{٥} = ١,١٦$$

٣ – وتصبح معادلتى خط الإتجاه العام هما :

أولهما : $\hat{ص}_{١}$ = ١,١٦ س + ٦,٦ (نقطة الأصل : ١٩٨٩ ، وحده القياس : سنة)

ثانيهما : $\hat{ص}_{٢}$ = ١,١٦ س + ١٢,٤ (نقطة الأصل : ١٩٩٤ ، وحده القياس : سنة)

٤ – بإستخدام المعادلة الأولى (يمكن التنبؤ بقيمة المبيعات عام ٢٠٠٠) كما يلى:

$\hat{ص}$ = أ س + ب

$\hat{ص}_{٢٠٠٠}$ = ١,١٦ (٢٠٠٠ – ١٩٨٩) + ٦,٦

= ١,١٦ × ١١ + ٦,٦

= ١٢,٧٦ + ٦,٦

= ١٩,٣٦ مليون جنيه

(ب) بإستخدام المعادلة الثانية (يمكن التنبؤ بقيمة المبيعات عام ٢٠٠٠) كما يلى :

$\hat{ص}_{٢٠٠٠}$ = ١,١٦ (٢٠٠٠ – ١٩٩٤) + ١٢,٤

= ١,١٦ × ٦ + ١٢,٤

= ٦,٩٦ + ١٢,٤

= ١٩,٣٦ مليون جنيه (وهى نفس النتيجة فى الأولى)

عيوب الطريقة السابقة

١ - نطبق هده الطريقة فقط فى حالة السلاسل الزمنية دات السنوات الزوجية، فإذا كان عدد سنوات السلسلة فردياً ، فنظراً لأنه لا يمكن تقسيمها إلى جزئين متساويين وعلى ذلك فيفضل حذف سنة منها – السنة الأولى أو السنة الوسطى – ليصبح عدد سنواتها زوجياً (كما جاء فى المثال (٣) السابق)

٢ – تستخدم هذه الطريقة إذا كان الاتجاه العام فى صورة خط مستقيم فقط أى أنها لا تطبق إذا كان الإتجاه العام فى صورة منحنى .

٣ – نظراً لأن خط الاتجاه العام يعتمد على الوسط الحسابى فى كلا جزئى السلسلة،ولما كان الأخير يتأثر بالقيم الشاذة أو المتطرفة فى أى من جزئى السلسلة، ومن ثم فإن خط الاتجاه العام لا يكون فى موضعه الصحيح وبالتالى يكون التنبؤ باستخدام معادلته مشكوك فى دقته.

ورغم كل ما تقدم فإنها من الطرق السهلة والبسيطة والتى لا تحتاج إلى مجهود حسابى كبير (*).

٢ - طريقة المتوسطات المتحركة : The moving avesage method

وتقوم هذه الطريقة على إستخدام أكثر من متوسطين حسابين حيث يتم حساب عدد من المتوسطات المتتابعة لمجموعات متداخلة من البيانات أو القيم الأصلية للظاهرة، على أن تتكون كل مجموعة منها من مفردتين أو ثلاثة أو أربعة أو خمسة على حسب الأحوال، وبمعنى آخر فقد يختلف طول دورة فترة المتوسط طبقاً لخبرة الباحث فى هذا المجال، ومما لا شك أن الإجراء السابق –

(*) من الممكن إستخدام الوسيط بدلاً من الوسط الحسابى فى الحالات التى يفضل فيها الاحصائيون إستخدام الوسيط بدلاً من الوسط الحسابى.

المتوسطات المتحركة - سيعمل على القضاء على الذبذبات أو التعرجات بسبب التغيرات الموسمية والتغيرات غير المنتظمة في المنحنى التاريخي للسلسلة الزمنيه وبذلك نحصل على سلسلة أكثر ملوسة أو تمهيداً من السلسلة الأصليه وسيتضح ذلك من الشكل رقم (٤٥)، كما أن قيم هذه المتوسطات المتحركة تمثل قيم إتجاهية تقريبية مخلصة من التأثيرات الموسمية والعرضية،فالمتوسطات المتحركة لدورة طولها فترتين زمنيتين سيكون عددها (ن - ١) متوسطاً قيمهاعبارة عن:

$$\frac{ص_1 + ص_2}{2} ، \frac{ص_2 + ص_3}{2} ، \frac{ص_3 + ص_4}{2} ، \ldots ، \frac{ص_{ن-1} + ص_ن}{2}$$

والمتوسطات المتحركة لدورة طولها ثلاث فترات زمنية سيكون عددها (ن – ٢) متوسط قيمها عبارة عن.

$$\frac{ص_1 + ص_2 + ص_3}{3} ، \frac{ص_3 + ص_4 + ص_5}{3} ، \frac{ص_5 + ص_6 + ص_7}{3}$$

$$\ldots ، \frac{ص_{ن-2} + ص_{ن-1} + ص_ن}{3}$$

وهكذا ... ، ومعنى ذلك أن القيم الإتجاهية ستكون أقل من القيم الأصلية على حسب طول دورة فترة المتوسط ، فكلما زاد طول هذه الدورة ، قلت عدد القيم الاتجاهية عن القيم الأصلية، وهو ما يعتبر عيباً من عيوب هذه الطريقة .

مثال (٤) حل المثال رقم (٢) السابق بإستخدام أسلوب المتوسطات المتحركات على أساس.

أولاً : طول دورة المتوسط سنتين.

ثانياً : طول دورة المتوسط ثلاثة سنوات.

الحــل :

جـــــــدول (١٩)

السنة	أولاً: قيمة المبيعات (ص) بالمليون جنيه	أولاً: المجموع المتحرك لسنتين	أولاً: المتوسط المتحرك لدورة طولها سنتين	ثانياً: قيمة المبيعات (ص) بالمليون جنيه	ثانياً: المجموع المتحرك لثلاث سنوات	ثانياً: المتوسط المتحرك لدورة طولها ٣ سنوات
١٩٨٦	٣	—	—	٣	—	—
١٩٨٧	٣	٦	٦ ÷ ٢ = ٣	٣	١٤	١٤ ÷ ٣ = ٤,٦٧
١٩٨٨	٨	١١	١١ ÷ ٢ = ٥,٥	٨	٢٠	٢٠ ÷ ٣ = ٦,٦٧
١٩٨٩	٩	١٧	١٧ ÷ ٢ = ٨,٥	٩	٢٣	٢٣ ÷ ٣ = ٧,٦٧
١٩٩٠	٦	١٥	١٥ ÷ ٢ = ٧,٥	٦	٢٢	٢٢ ÷ ٣ = ٧,٦٧
١٩٩١	٧	١٣	١٣ ÷ ٢ = ٦,٥	٧	٢٥	٢٥ ÷ ٣ = ٨,٣٣
١٩٩٢	١٢	١٩	١٩ ÷ ٢ = ٩,٥	١٢	٣٢	٣٢ ÷ ٣ = ١٠,٦٧
١٩٩٣	١٣	٢٥	٢٥ ÷ ٢ = ١٢,٥	١٣	٣٥	٣٥ ÷ ٣ = ١١,٦٧
١٩٩٤	١٠	٢٣	٢٣ ÷ ٢ = ١١,٥	١٠	٣٤	٣٤ ÷ ٣ = ١١,٣٣
١٩٩٥	١١	٢١	٢١ ÷ ٢ = ١٠,٥	١١	٣٧	٣٧ ÷ ٣ = ١٢,٣٣
١٩٩٦	١٦	٢٧	٢٧ ÷ ٢ = ١٣,٥	١٦	—	—
		—	—			

ونلاحظ من الجدول السابق أن :

١ – لايجـاد المتوسط المتـحـرك الأول فى ثانيـاً = ٣ + ٣ + ٨ = ١٤ ÷ ٣ = ٤,٦٧

وهو يقع أمام السنة المتوسطة أى أمام عام ١٩٨٧

٢ – لايجاد المتوسط المتحرك الثانى فى ثانياً = ٣ + ٨ + ٩ = ٢٠ ÷ ٣ = ٦,٦٧

وهو يقع امام السنه المتوسطة أى أمام عام ١٩٨٨

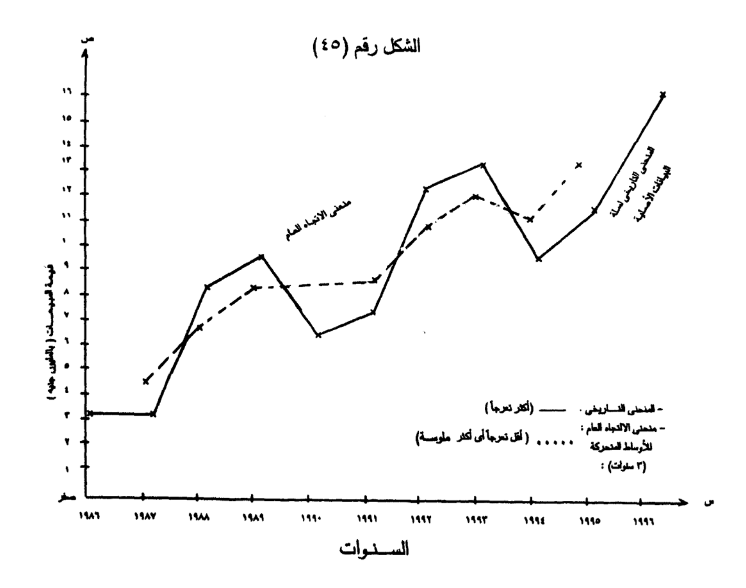
وهكذا ...

٣ – أن عدد القيم الاتجاهية = ١١ – ٢ = ٩ فقط ، لأنه لا توجد قيمة إتجاهية للسنة الأولى من السلسلة الزمنية (١٩٨٦) كما لا توجد قيمة إتجاهية للسنة الأخيرة من السلسلة الزمنية (١٩٩٦) .

٤ – إذا كان طول دورة المتوسط ٥ سنوات مثلاً سنجد أن أول متوسط متحرك سيقع أمام عام ١٩٨٨ وبالتالى لا تكون هناك قيم إتجاهية أمام السنتين الأوليتين من سنوات السلسلة الزمنية (١٩٨٦ ، ١٩٨٧)، كما أن آخر متوسط متحرك سيقع أمام عام ١٩٩٤ وبالتالى لا تكون هناك قيم إتجاهية أمام السنتين الأخيرتين من سنوات السلسلة الزمنية (١٩٩٥ ، ١٩٩٦).

٥ – نلاحظ أنه إذا كان طول دورة المتوسط زوجية، فإن القيمة الاتجاهية لا تواجه سنة محدد ، ولكن تقع فى الفراغ بين سنتين متتاليتين أو قيمتين أصليتين، فالمتوسط المتحرك الأول فى أولاً يقع بين السنتين ١٩٨٦ ، ١٩٨٧ ولا يقع أمام أحدهما، لذلك فى مثل هذه الحالة نلجأ إلى المتوسطات المتحركة المركزية أو ما يطلق عليه المتوسط الممركز (Centered average) فى مواجهة إحدى السنوات أو القيم الأصلية – وذلك بأخذ الوسط الحسابى لكل وسطين متحركين متتاليين من الأوساط المتحركة التى تم الحصول عليها من السلسلة الزمنية فى الخطوة السابقة .

الشكل رقم (٤٥)



قيمه المبيعات (بالمليون جنيه)
قيمة المبيعات (بالمليون جنيه)
ص
صفر
١
٢
٣
٤
٥
٦
٧
٨
٩
١٠
١١
١٢
١٣
١٤
١٥
١٦
١٩٨٦
١٩٨٧
١٩٨٨
١٩٨٩
١٩٩٠
١٩٩١
١٩٩٢
١٩٩٣
١٩٩٤
١٩٩٥
١٩٩٦
س
منحنى الاتجاه العام
المنحنى التاريخي لسلة البيانات الأصلية
- المنحنى التاريخي . ـــــ (أكثر تعرجاً)
- منحنى الاتجاه العام : ..... (أقل تعرجاً أى أكثر ملوسة)
للأوساط المتحركة
(٣ سنوات) :
السنوات

فالمتوسط المركزى إذا كانت طول دورة المتوسط المتحرك فترتين عبارة عن

$$\frac{١}{٢}\left(\frac{\text{ص}_{١}+\text{ص}_{٢}}{٢}+\frac{\text{ص}_{٢}+\text{ص}_{٣}}{٢}\right)\ ،\ \frac{١}{٢}\left(\frac{\text{ص}_{٣}+\text{ص}_{٤}}{٢}+\frac{\text{ص}_{٤}+\text{ص}_{٥}}{٢}\right)$$

وهكذا، والمتوسط المركزى السابق سيقع أمام سنة أو قيمة أصلية من سنوات أو قيم السلسلة الزمنية .

مثال (٥) إحسب القيم الاتجاهية بإستخدام أسلوب الأوساط المتحركة فى المثال رقم (٤) السابق إذا كان طول دورة المتوسط المتحرك أربع سنوات.

الحـل :

جـــدول (٢٠)

السنة	قيمة المبيعات (ص) بالمليون جنيه	المجموع المتحرك لأربع سنوات	المتوسط المتحرك لأربع سنوات	الأوساط المتحركة المركزية (القيم الاتجاهية)
١٩٨٦	٣	—	—	—
١٩٨٧	٣	—	—	—
		٢٣	٢٣ ÷ ٤ = ٥,٧٥	
١٩٨٨	٨			$\frac{٦,٥+٥,٧٥}{٢}$ = ٦,١٢٥
		٢٦	٢٦ ÷ ٤ = ٦,٥	
١٩٨٩	٩			$\frac{٧,٥+٦,٥}{٢}$ = ٧
		٣٠	٣٠ ÷ ٤ = ٧,٥	
١٩٩٠	٦			$\frac{٨,٥+٧,٥}{٢}$ = ٨
		٣٤	٣٤ ÷ ٤ = ٨,٥	
١٩٩١	٧			$\frac{٩,٥+٨,٥}{٢}$ = ٩
		٣٨	٣٨ ÷ ٤ = ٩,٥	
١٩٩٢	١٢			$\frac{١٠,٥+٩,٥}{٢}$ = ١٠
		٤٢	٤٢ ÷ ٤ = ١٠,٥	
١٩٩٣	١٣			$\frac{١١,٥+١٠,٥}{٢}$ = ١١
		٤٦	٤٦ ÷ ٤ = ١١,٥	
١٩٩٤	١٠			$\frac{١٢,٥+١١,٥}{٢}$ = ١٢
		٥٠	٥٠ ÷ ٤ = ١٢,٥	
١٩٩٥	١١		—	—
١٩٩٦	١٦	—	—	—

وعاده ما يستخدم المتوسطات المتحركه لدوره طولها ١٢ شهراً فى السلاسل الزمنية للبيانات التجارية والاقتصاديه التى تنشر شهرياً، ذلك لأن مثل هذا المتوسط المتحرك فى الأحوال السابقة يكون فعالا فى التخلص من التغيرات الموسميه والعرضية على أن يتم إستخدام الأوساط المتحركة المركزية بعد ذلك.

ومن أهم عيوب طريقة المتوسطات المتحركة :

١ - أن عدد القيم الاتجاهية التى يتم الحصول عليها تقل عن عدد القيم الأصلية للسلسلة الزمنية ، حيث نفقد عدداً من القيمة الاتجاهية فى أول وآخر السلسلة ويزيد عدد القيم الاتجاهية المفقودة كلما طالت دورة المتوسط المتحرك.

٢ - أن كل متوسط متحرك يمكن أن يتأثر بالقيم المتطرفة فى بيانات طول دورة المتوسط المتحرك.

٣ - الحصول على القيم الاتجاهية دون معادلة للإتجاه العام كما جاء بطريقة أشباه المتوسطات السابقة ، الأمر الذى لا يمكننا من التنبؤ بالقيم الاتجاهية للظاهرة موضوع الدراسة فى نقاط زمنية مستقبلية أى لاحقة لسنوات السلسلة الزمنية .

٤ – الاعتماد على الخبرة الشخصية – ضرورة التجربة – للحصول على أنسب طول للدورة للوسط المتحرك والذى يختلف من ظاهرة لأخرى.

٤ - طريقة المربعات الصغرى : Method of leas squares

وتعتبر هذه الطريقة ، أكثر موضوعية من الطرق السابقة حيث أنها تتلافى العيوب التى شابت الطرق الثلاثة السابقة.

وبمقتضى هذه الطريقة يتم الحصول على خط أو منحنى واحد ممهد للاتجاه العام يعتبر أفضل خط أو منحنى يمثل القيم الأصلية للظاهرة،ويتم الوصول إلى هذا الخط أو المنحنى الممهد بطريقة موضوعية بعيدة كل البعد عن الإجتهادات الشخصية للباحثين كما جاء فى الطرق الثلاث السابقة.

حيث تقوم هذه الطريقة على فكرة بسيطة مؤداها انه عند توفيق خط مستقيم أو منحنى، فإن أفضل خط مستقيم او منحنى بإتباع هذه الطريقة هو الذى يكون مجموع مربعات إنحرافات النقاط على المنحنى الأصلى للقيم عن الخط أو المنحنى الممهد الممثل للاتجاه العام اصغر ما يمكن أى عند حدها الأدنى، ونظراً لأن الشكل العام للانتشار أو المنحنى التاريخى للسلسلة الزمنية قد يكون شبه مستقيم أو فى صورة منحنى لذا فإن خط الاتجاه العام قد يكون مستقيماً أو فى صورة منحنى لذا سنفرق عند دراستنا فى هذه الطريقة بين الاتجاه العام الخطى والاتجاه العام غير الخطى.

أولاً : الاتجاه العام الخطى (*) : وتكون معادلته:

ص = أ س + ب + خ .. .. (١)

حيث أ ≠ صفر

وأن خ هو الخطأ العشوائى للمعادلة، وتهدف هذه الطريقة إلى الحصول على قيم أ ، ب بحيث يكون

مجـ خ^{٢} = مجـ (ص – أ – ب س)^{٢} أقل ما يمكن (إرجع فى ذلك إلى ص ٢٧٤ ، ٢٧٥ بالفصل السابع) .

وينتج لنا ذلك بالمعادلتين القياسيتين التاليتين :

مجـ ص = أ مجـ س + ن ب .. .. (١)

مجـ س ص = أ مجـ س^{٢} + ب مجـ س .. .. (٢)

حيث ن عدد الفترات الزمنية .

(*) ممكن بإستخدام شكل الانتشار التحقق من أن الاتجاه العام فى صورة مستقيم أو شبه مستقيم أى أن الاتجاه العام خطى نفس الشيء يمكن أيضاً بإستخدام طريقة أخرى تعرف بطريقة الفروق فإذا كان الفرق الأول Δ ص = مقدار ثابت يكون منحنى الاتجاه العام خطى، لكن إذا كان الفرق الثانى ($Δ^{٢}$ ص) ثابت يكون منحنى الاتجاه العام غير خطى وليس خطياً .

وبحل المعادلتين السابقتين يدوياً (أو بإستخدام برامج الحاسب الآلى) نحصل على قيم أ ، ب التى تجعل مجـ خ٢ عند حدها الأدنى ، وبذلك يتحدد الخط المستقيم فى (١) الممثل للاتجاه العام على فرض أنه مستقيم ، حيث أن ص تمثل القيم الاتجاهية للظاهرة ، س الفترة الزمنية ، أ ، ب مقدران ثابتان كما يمكن الوصول إلى أ ، ب كما يلى (راجع حساب معامل الانحدار بالفصل السابع)

$$\text{أ} = \frac{\frac{\text{مجـ س ص}}{\text{ن}} - \frac{\text{مجـ س}}{\text{ن}} \times \frac{\text{مجـ ص}}{\text{ن}}}{\frac{\text{مجـ س}^{2}}{\text{ن}} - \left(\frac{\text{مجـ س}}{\text{ن}}\right)^{2}} \qquad (٢)$$

$$\text{، ب} = \frac{\text{مجـ ص}}{\text{ن}} - \text{أ} . \frac{\text{مجـ س}}{\text{ن}} \qquad (٣)$$

مثال (٦) فيما يلى سلسلة زمنية سنوية لإنتاج إحدى الدول من البترول الخام خلال المدة من ١٩٨٨ – ١٩٩٤ بالمليون طن.

جدول (٢١)

السنة	١٩٨٨	١٩٨٩	١٩٩٠	١٩٩١	١٩٩٢	١٩٩٣	١٩٩٤
الإنتاج بالمليون طن	٤٢	٤٣	٤٣	٤٥	٤٤	٤٦	٤٩

والمطلوب :

١ – حساب معادلة الاتجاه العام بطريقة المربعات الصغرى بفرض أنه خط مستقيم بأكثر من طريقة.

٢ – التنبؤ بالإنتاج السنوى من البترول الخام لهذه الدولة عام ٢٠٠٠ .

الحـــل : الطريقــة الأولى : نقطة الأصل هى السنة الأولى بالسلسلة (١٩٨٨) ويمكن أن نعطى للسنوات ١٩٨٨ ، ٨٩ ، ٩٠ ، ٩١ ، ٩٢ ، ٩٣ ، ١٩٩٤ الأرقام ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ على الترتيب كما يتضح من الجدول التالى:

جـــدول (٢٢)

السـنـة	قيمة الإنتاج بالمليون طن (ص)	السنوات (س)	س ص	س
١٩٨٨	٤٢	٠	٠	٠
١٩٨٩	٤٣	١	٤٣	١
١٩٩٠	٤٣	٢	٨٦	٤
١٩٩١	٤٥	٣	١٣٥	٩
١٩٩٢	٤٤	٤	١٧٦	١٦
١٩٩٣	٤٦	٥	٢٣٠	٢٥
١٩٩٤	٤٩	٦	٢٩٤	٣٦
المجموع	٣١٢	٢١	٩٦٤	٩١

حيث ن = ٧ (عدد فردى)

$$\therefore \text{أ} = \frac{\frac{\text{مجـ س ص}}{\text{ن}} - \frac{\text{مجـ س}}{\text{ن}} \times \frac{\text{مجـ ص}}{\text{ن}}}{\frac{\text{مجـ س}^{2}}{\text{ن}} - \left(\frac{\text{مجـ ص}}{\text{ن}}\right)^{2}}$$

$$\therefore \text{أ} = \frac{\frac{\text{٩٦٤}}{\text{٧}} - \frac{\text{٢١}}{\text{٧}} \times \frac{\text{٣١٢}}{\text{٧}}}{\frac{\text{٩١}}{\text{٧}} - \left(\frac{\text{٢١}}{\text{٧}}\right)^{2}} = \text{١}$$

$$\therefore \quad ب = \frac{مجـ ص}{ن} - أ \cdot \frac{مجـ س}{ن}$$

$$\therefore \quad ب = \frac{٣١٢}{٧} - ١ \times \frac{٢١}{٧} = ٤١,٥٧$$

∴ ص = س + ٤١,٥٧ (نقطة الأصل عام ١٩٨٨ وحدة الزمن س : سنة)

(ممكن الوصول لنفس المعادلة السابقة باسلوب حل المعادلتين القياسيتين)، وبإستخدام معادلة الاتجاه العام السابق يمكن التنبؤ بقيم ص عند العام ٢٠٠٠ كما يلى :

تاريخ سنة التنبؤ - تاريخ سنة الأساس

$$ص_{٢٠٠٠} = ١ (٢٠٠٠ - ١٩٨٨) + ٤١,٥٧$$

$$= ١ \times ١٢ + ٤١,٥٧$$

$$= ١٢ + ٤١,٥٧$$

= ٥٣,٥٧ مليون طن

الطريقة الثانية :

(نقطة الأصل هى السنة المتوسطة بالسلسلة أى عام ١٩٩١)، وتعمل الطريقة الثانية على تسهيل العمليات الحسابية، ويطلق عليها المختصرة وعلى ذلك سيكون قيم (س) كما يلى :

السنوات :	١٩٨٨	٨٩	٩٠	١٩٩١	٩٢	٩٣	٩٤
(س)	-٣	-٢	-١	صفر	+١	+٢	+٣

أى تأخذ السنوات قبل عام ١٩٩١ قيم سالبة -١ ، -٢ ، -٣ على الترتيب وتأخذ السنوات بعد عام ١٩٩١ قيم موجبة +١ ، +٢ ، +٣ على الترتيب كما فى المثال رقم (٧) التالى :

جـــدول رقم (٢٣)

السنة	(ص) الإنتاج بالمليون طن	س (بالسنوات)	س ص	س٢	القيمة الاتجاهية	القيمة النسبية مخلصة من أثر الاتجاه العام
					صَ = س + ٤٤,٥٧	ص / صَ × ١٠٠ ٪
						٪
١٩٨٨	٤٢	-٣	-١٢٦	٩	-٣ + ٤٤,٧ = ٤١,٥٧	٤٢ / ٤١,٥٧ × ١٠٠ = ١٠١
١٩٨٩	٤٣	-٢	-٨٦	٤	-٢ + ٤٤,٥٧ = ٤٢,٥٧	٤٣ / ٤٢,٥٧ = ١٠١
١٩٩٠	٤٣	-١	-٤٣	١	-١ + ٤٤,٥٧ = ٤١,٥٧	٤٣ / ٤١,٥٧ × = ١٠٣,٤
١٩٩١	٤٥	صفر	صفر	صفر	صفر + ٤٤,٥٧ = ٤٤,٥٧	٤٥ / ٤٤,٥٧ × ١٠٠ = ١٠١
١٩٩٢	٤٤	+١	٤٤	١	١ + ٤٤,٥٧ = ٤٥,٥٧	٤٤ / ٤٥,٥٧ × ١٠٠ = ٩٦,٥
١٩٩٣	٤٦	+٢	٩٢	٤	٢ + ٤٤,٥٧ = ٤٦,٥٧	٤٦ / ٤٦,٥٧ × ١٠٠ = ٩٨,٨
١٩٩٤	٤٩	+٣	١٤٧	٩	٣ + ٤٤,٥٧ = ٤٧,٥٧	٤٩ / ٤٧,٥٧ × ١٠٠ = ١٠٣
المجموع	٣١٢	صفر	+٢٨٣ -٢٥٥ +٢٨	٢٨		

ونظراً لأن (مجـ س = صفر) فنجد :

$$أ = \frac{مجـ\ س\ ص}{مجـ\ س^{٢}}$$

$$= \frac{٢٨٢٠}{٢٨} = ١$$

$$،\ ب = \frac{مجـ\ ص}{ن}$$

$$= \frac{٣١٢}{٧} = ٤٤,٥٧$$

وتصبح معادلة الاتجاه العام

$\hat{ص}$ = س + ٤٤,٥٧ (نقطة الأصل عام ١٩٩١ ، وحدة الزمن س : سنة)

وعليه يكون الإنتاج المتوقع عام ٢٠٠٠

$\hat{ص}$ = ١ × (٢٠٠٠ − ١٩٩١) + ٤٤,٥٧

= ١ × ٩ + ٤٤,٥٧

= ٩ + ٤٤,٥٧

= ٥٣,٧ مليون طن (وهى نفس النتيجة فى الطريقة الأولى)

إذا كان عدد سنوات السلسلة (ن) عدداً ازدواجياً :

مثـال (٨) :

حـل المثـال رقم (٦) السـابق بفـرض أضـيف إلى السلسلة إنتـاج عـام ١٩٩٥ وكان ٥٣ مليون طـن.

الحــــل :

بالطريقة الثانية : جـــــدول (٢٤)

(نقطة الأصل هى متوسط السلسلة منتصف عام ١٩٩١ أى يوليو (تموز) ١٩٩١ .

السنــة	(ص) الإنتاج بالمليون ص	الزمن بالسنوات	ص الزمن (*) بأنصاف السنوات	س ص	$س^٢$
١٩٨٨	٤٢	- ٣ ١/٢	-٧	-٢٩٤	٤٩
١٩٨٩	٤٣	- ٢ ١/٢	-٥	-٢١٥	٢٥
١٩٩٠	٤٣	- ١ ١/٢	-٣	-١٢٩	٩
١٩٩١	٤٥	- ١/٢	-١	-٤٥	١
		صفر	صفر	صفر	صفر
١٩٩٢	٤٤	+ ١/٢	+١	+٤٤	١
١٩٩٣	٤٦	+ ١, ١/٢	+٣	+١٣٨	٩
١٩٩٤	٤٩	+ ٢ ١/٢	+٥	+٢٤٥	٢٥
١٩٩٥	٥٣	+ ٣ ١/٢	+٧	+٣٧١	٤٩
المجموع	٣٦٥	صفر	صفر	+٧٩٨ -٦٨٣ +١١٥	١٦٨

(*) نعتبر كل ١/٢ سنة = ١

حيث ن = ٨ (عدد زوجى)

$$أ = \frac{١١٥}{١٦٨} = ٠,٦٨٥$$

$$ب = \frac{٣٦٥}{٨} = ٤٥,٦٢٥$$

وتصبح معادلة الاتجاه العام

$\hat{ص}$ = ٠,٦٨٥ ص + ٤٥,٦٢٥ (نقطة الأصل يوليـو (تموز) ١٩٩١
وحدة الزمن س : $\frac{١}{٢}$ سنة)

وعليه يكون الإنتاج المتوقع فى يناير (كانون ثانى) عام ٢٠٠٠

$\hat{ص}_{٢٠٠٠}$ = ٠,٦٨٥ × ١٧ + ٤٥,٦٢٥
= ١١,٦٤٥ + ٤٥,٦٢٥
= ٥٧,٢٧ مليون طن

ملحوظة (١) :

(أ) وضعنا س = صفر أمام منتصف السلسلة الزمنية السابقة أى فى المنتصف بين سنتى ١٩٩١ ، ١٩٩٢ أى فى يوليو (تموز) ١٩٩١ .

(ب) ووضعنا س = ١ ، + ١ أمام السنتين ١٩٩١ ، ١٩٩٢ على الترتيب أى جعلنا الفرق بينهما وبين منتصف سنة،وبذلك ١٩٩١ عبارة عن الوحدة (١) والوحدة هنا تعنى نصف سنة وبذلك نتلافى الكسور لتسهيل العمليات الحسابية، وعليه فقد وضعنا أمام عام ١٩٩٠ (س = −٣) بدلاً عن $\frac{١}{٢}$١ سنة ، فى عام ١٩٩٣،(س = + ٣ أى عن فرق يساوى $\frac{١}{٢}$١ سنة) ... وهكذا بالنسبة لباقى سنوات السلسلة السابقة أو اللاحقة لنقطة الأصل.

ملحوظة (٢) : لحساب س = يناير (كانون ثانى) ٢٠٠٠ - يوليو (تموز ١٩٩١)

= $\frac{١}{٢}$ ٨ (سنة) × ٢ = ١٧ فترة زمنيةطول كل منها $\frac{١}{٢}$ سنة.

ملحوظة (٣) :

عند الوصول إلى معادلة إتجاهية محددة لابد أن يكتب أمامها كل من:

(أ) نقطة أو سنة الأصل لها.

(ب) وحدة الزمن المستخدمة بها حتى يمكننا الحصول على التقدير الدقيق للقيم الاتجاهية المتبأ بها فى المستقبل أى بعد سنوات السلسلة الزمنية :

ملحوظة (٤) :

إن أسلوب تحديد الاتجاه العام لبيانات شهرية أو ربع سنوية للظاهرة لا يختلف عما إذا كانت البيانات للظاهرة سنوية الا بزيادة الجهد الحسابى والوقت نتيجة زيادة عدد البيانات وتكون المعادلة لوحدة زمن شهرية أو ربع سنوية على حسب الأحوال.

الخطأ المعيارى وليكن ع (ص/س)(*)

يعتبر الخطأ المعيارى إختبار إحصائى لقياس دقة تمهيداً أى خط مستقيم بإستخدام (طريقة المربعات الصغرى أو شبيه المتوسطات أو طريقة الرسم البيانى) حيث أن .

$$ع_{ص/س} = \sqrt{\frac{مجـ (ص - \hat{ص})^٢}{ن}}$$

$$أو\ ع_{ص/س} = \sqrt{\frac{مجـ ص^٢ - ن\ مجـ ص - أ\ مجـ س\ ص}{ن}}$$

(طبق هذا الاختبار على الأمثلة ٦ ، ٧ السابقة)

(*) انظر الخطأ المعيارى لمعادلة الانحدار بالمبحث الأول الفصل السابق ص ٢٨٧ .

ثانياً . الاتجاه العام غير الخطى Non linear trend

في بعض الأحيان نجد أن الظاهرة موضوع الدراسة عند تمثيلها فى شكل الانتشار أو بإستخدام طريقة الفروق ، نجد أن منحنى الاتجاه العام غير خطى (*)، فمثلاً قد يتبين لنا أن منحنى الاتجاه العام منحنى من الدرجة الثانية، وتكون معادلته على الصورة.

ص = أ س^{٢} + ب س + حـ + خ .. .. (٢)

حيث أ ≠ صفر

حيث خ تشير إلى الخطأ العشوائى للمعادلة وحتى نحصل على أفضل منحنى ممهد بإستخدام طريقة المربعات الصغرى، يجب أن يكون مجـ خ^{٢} أقل ما يمكن (كما سبق أن أوضحنا عند دراسة الاتجاه العام الخطى)، ويتم الوصول إلى ثوابت المعادلة (٢) السابقة أ ، ب ، حـ التى تحقق الهدف السابق بحل المعادلات القياسية التالية:

مجـ ص = أ مجـ س^{٢} + ب مجـ س + ن حـ .. .. (١)

مجـ س^{٢} ص = أ مجـ س^{٣} + ب مجـ س^{٢} + حـ مجـ س .. .. (٢)

مجـ س ص = أ مجـ س^{٤} + ب مجـ س^{٣} + حـ مجـ س^{٢} .. .. (٣)

(وأيضاً لتبسيط العمليات الحسابية يفضل أن يتم إختيار نقطة الأصل بحيث تجعل مجـ س = صفر وبالتالى مجـ س^{٣} = صفر)

الأمر الذى يجعل المعادلات الثلاثة القياسية السابقة تصبح كما يلى :

مجـ ص = أ مجـ س^{٢} + ن حـ .. .. (١)

مجـ س ص = ب مجـ س^{٢} .. .. (٢)

(**) فقد يكون فى شكل منحنى أسى ، أو منحنى نمو (جومبيرتز ، اللوجستى).

مجـ س^{2}ص = أ مجـ س^{4} + حـ مجـ س^{2} .. .. (٣)

ومنها نستنتج :

$$\text{ب} = \frac{\text{مجـ س ص}}{\text{مجـ س}^{2}}$$

وبحل المعادلتين الأولى والثالثة نوجد قيم أ ، حـ وبذلك نتمكن من الحصول على قيم الثوابت أ ، ب ، حـ المطلوبة .

وسيتضح ما تقدم عند حل المثال التالى

مثـال (٩) :

الجدول التالى عبارة عن سلسلة زمنية لإنتاج إحدى الشركات بالمليون وحدة سلعية متشابه خلال المدة من عام ١٩٨٢ – ١٩٩٢

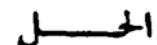
جـــدول (٢٥)

السنة	١٩٨٤	١٩٨٣	١٩٨٤	١٩٨٥	١٩٨٦	١٩٨٧	١٩٨٨	١٩٨٩	١٩٩٠	١٩٩١	١٩٩٢
الإنتاج بالمليون وحدة	٣٣,٢	٣١,٤	٣٩,٨	٥٠,٢	٦٢,٩	٧٦	٩٢	١٠٥,٧	١٢٢,٧	١٣١,٧	١٧١,١

والمطلوب :

(أ) تحديد منحنى الاتجاه العام للإنتاج بيانياً .

(ب) تحديد معادلة الإتجاه العام بطريقة المربعات الصغرى .



ص

١٨٧
١٧٠
١٥٣
١٣٦
١١٩
١٠٢
٨٥
٦٨
٥١
٣٤
١٧
صفر

الإنتاج بالمليون وحدة

منحنى الاتجاه العام

المنحنى التاريخى لسلسلة البيانات الأصلية

المنحنى التاريخى ـــــــ

منحنى الاتجاه العام ....

س

١٩٨٢ ٨٣ ٨٤ ٨٥ ٨٦ ٨٧ ٨٨ ٨٩ ٩٠ ٩١ ٩٢

الســـــنوات

الشكل رقم (٤٦)

(أ) الاتجاه العام فى شكل منحنى من الدرجة الثانية

ص = أ س^{٢} + ب س + حـ

ويمكن تحديد معادلة منحى الاتجاه العام بالطريقة المختصرة كما يلى :

جـــدول (٢٦)

السنة	الإنتاج (ص) بالمليون	(س) بالسنوات	$س^2$	$س^3$	$س^4$	س ص	$س^2$ص
١٩٨٢	٣٣,٢	-٥	٢٥	-١٢٥	٦٢٥	-١٦٦	٨٣٠
١٩٨٣	٣١,٤	-٤	١٦	-٦٤	٢٥٦	-١٢٥,٦	٥٠٢,٤
١٩٨٤	٣٩,٨	-٣	٩	-٢٧	٨١	-١١٩,٤	٣٥٨,٢
١٩٨٥	٥٠,٢	-٢	٤	-٨	١٦	-١٠٠,٤	٢٠٠,٨
١٩٨٦	٦٢,٩	-١	١	-١	١	-٦٢,٩	٦٢,٩
١٩٨٧	٧٦,-	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر
١٩٨٨	٩٢,-	+١	١	١	١	٩٢	٩٢
١٩٨٩	١٠٥,٧	+٢	٤	١٦	١٦	٢١١,٤	٤٢٢,٨
١٩٩٠	١٢٢,٧	+٣	٩	٢٧	٨١	٣٦٨,٤	١١٠٤,٢
١٩٩١	١٣١,٧	+٤	١٦	٦٤	٢٥٦	٥٢٦,٨	٢١٠٧,٢
١٩٩٢	١٧١,١	+٥	٢٥	١٢٥	٦٢٥	٨٥٥,٥	٤٢٧٧,٥
المجموع	٩١٦,٧	صفر	١١٠	صفر	١٩٥٨	١٣٨٧,٨	١٠٤٥,٨

وبالتعويض فى المعادلات الثلاث السابقة نجد أن

٩١٦,٧ = ١١٠ أ + ١١ حـ .. .. (١)

١٣٨٧,٨ = ١١٠ ب .. .. (٢)

١٠٤٥,٨ = ١٩٥٨ أ + ١١٠ حـ .. .. (٣)

ومنهـا :

$$ب = \frac{١٣٨٧,٨}{١١٠} = ١٢,٦١٦$$

وبأخذ المعادلتين (١) ، (٢)

٩١٦٧ = ١١٠ أ + ١١ حـ × ١٠ .. .. .. (٤) بالضرب فى ١٠

-,١٠٤٥٨ = ١٩٥٨ أ + ١١٠ حـ .. .. (٥)

-,٩١٦٧ = ١١٠٠ أ + ١١٠ حـ .. .. (٦)

١٢٩١ = ٨٥٨ أ .. .. بطرح (٦) من (٥)

$$ومنها\ أ = \frac{١٢٩١}{٨٥٨} = ١,٥$$

وبالتعويض بقيمة (أ) فى المعادلة (١) :

٩١٦٧ = ١١٠ × ١,٥ + ١١ حـ

٩١٦,٧ - ١٦٥ = ١١٠ حـ

٧٥١,٧ = ١١٠ حـ

$$ومنها\ حـ = \frac{٧٥١,٧}{١١} = ٦٨,٣٤$$

وتصـبح مـعادلـة الاتجـاه العـام صَ = ١,٥ س٢ + ١٢,٦١٦ س + ٦٨,٣٤ (نقطة الأصل : ١٩٨٧ وحدة الزمن (س) : سنة) .

إستبعاد أثر الإتجاه العام:

وهذا يعنى حصولنا على قيمه للظاهرة متأثرة بالتغيرات الأخرى وهى – أثر التغيرات الموسمية، وأثر التغيرات الدورية، وأثر التغيرات العشوائية – دون أثر الاتجاه العام، فطى فرض أن النموذج المستخدم هو نموذج حاصل الضرب أى أن:

$$\hat{\text{ص}} = \text{ت}_{\text{ن}} \times \text{م}_{\text{ن}} \times \text{د}_{\text{ن}} \times \text{ع}_{\text{ن}}$$

فإنه للحصول على $\text{ت}_{\text{ن}}$ أى ($\hat{\text{ص}}$) فقد تم ذلك بطرق عديدة سبق الاشارة إليها سابقاً وكانت طريقة المربعات الصغرى أفضلها حيث .

ص = أ س + ب .. فى حال الاتجاه العام الخطى ،

ص = أ س^{2} + ب س + حـ فى حالة الاتجاه العام غير الخطى

فلكى نستبعد أثر الاتجاه العام فنستخدم المعادلة التالية التى تحقق ذلك :

قيمة الظاهرة بعد تخلصها من أثر الاتجاه العام ($\text{ت}_{\text{ن}}$):

$$= \frac{\text{القيمة الأصلية للظاهرة (ص) فى الفترة الزمنية للسلسلة}}{\text{القيمة الاتجاهية للظاهرة } (\hat{\text{ص}}) \text{ المناظرة لكل فترة زمنية للسلسلة}} \times ١٠٠$$

$$\text{أى} = \frac{\text{ص}}{\hat{\text{ص}}} \times ١٠٠$$

وبتطبيق ذلك على بيانات المثال رقم (٧/٦) السابق – أنظر الجدول رقم (٧/٢) حيث بلغت القيم الاتجاهية :

$\hat{\text{ص}}_{٨٨}$ = ٤١,٥٧ $\hat{\text{ص}}_{٩٢}$ = ٤٥,٥٧

$\hat{\text{ص}}_{٨٩}$ = ٤٢,٥٧ $\hat{\text{ص}}_{٩٣}$ = ٤٦,٥٧

$\hat{\text{ص}}_{٩٠}$ = ٤١,٥٧ $\hat{\text{ص}}_{٩٤}$ = ٤٧,٥٧

$\hat{\text{ص}}_{٩١}$ = ٤٤,٥٧

بينما بلغت نسب الإنتاج مخلصة من أثر الاتجاه العام

١٠١ ٪، ١٠١ ٪، ١٠٣,٤ ٪، ١٠١ ٪، ٩٦,٥ ٪، ٩٨,٨ ٪، ١٠٣ ٪

من القيم الأصلية على الترتيب خلال سنوات السلسلة، ومعنى ذلك أن هناك زيادة فى الانتاج الأصلى عن القيمة الإتجاهية بنسبة ١ ٪ ، ١ ٪ ، ٣,٤ ٪ ، ١ ٪ ، ٣ ٪ خلال الأعوام ١٩٨٨، ١٩٨٩ ، ١٩٩٠ ، ١٩٩١ ، ١٩٩٤ بينما هناك نقص فى الإنتاج بنسب ٣,٥ ٪ ، ١,٢ ٪ خلال الأعوام ١٩٩٢ ، ١٩٩٣ .

ويمكن تمثيل ما سبق فى الجدول التالى :

جـــدول (٢٧)

السـنـة	القيمة الأصلية للإنتاج (ص) (تن×من×دن×عن)	القيمة الاتجاهية للإنتاج (ت ن) أو (صً)	$\frac{ص}{\hat{ص}}$ × ١٠٠ ٪ (من × دن × ع ن)	النسبة المئوية $\frac{ص}{\hat{ص}}$ × ١٠٠ ٪ ٪
١٩٨٨	٤٢	٤١,٥٧	١,٠١	١٠١
١٩٨٩	٤٣	٤٢,٥٧	١,٠١	١٠١
١٩٩٠	٤٣	٤١,٥٧	١,٠٣٤	١٠٣,٤
١٩٩١	٤٥	٤٤,٥٧	١,٠١	١٠١
١٩٩٢	٤٤	٤٥,٥٧	٠,٩٦٥	٩٦,٥
١٩٩٣	٤٦	٤٦,٥٧	٠,٩٨٨	٩,٨٨
١٩٩٤	٤٩	٤٧,٥٧	١,٠٣	١٠٣

ومن الجدول السابق نستنتج ما يلى :

١ – عندما تم قسمة الإنتاج الأصلى على الإنتاج المتوقع (القيمة الاتجاهية) ونشأ لدينا قيم الإنتاج بعد إستبعاد الاتجاه العام أى قيمة الظاهرة متأثرة بالتغيرات الموسمية والدورية والعرضية فقط ويمكن التعبير عنها فى شكل نسب مئوية.

ففى مثالنا تعنى هذه النسب أن الإنتاج الأصلى فى أعوام ١٩٨٨ ، ١٩٨٩، ١٩٩٠ ، ١٩٩١ ، ١٩٩٤ كان أعلى من القيم الإتجاهية بنسب ١ ٪ ، ١ ٪، ٣,٤ ٪ ، ١ ٪ ، ٣ ٪ على الترتيب وهى نسب الموسم والدورية والعرضية ، فى حين أنه فى عامى ١٩٩٢ ، ١٩٩٣ كان الإنتاج الأصلى أقل بنسب ٣,٥ ٪ ، ١,٢ ٪ بسبب التأثيرات الموسمية والدورية والعرضية مجتمعة .

٢ – يجب أن ننوه هنا أنه إذا كانت النسبة فى العمود الأخير $\frac{ص}{ص}$ × ١٠٠

فى الجدول السابق (١٠٠ ٪) لكان معنى ذلك أن الإنتاج الأصلى – أى قيمة الظاهرة الأصلية – فى هذه السنة أو الفترة – لم تكن متأثرة أو خاضعة للتأثيرات الموسمية والدورية والعرضية مجتمعة أو منفردة.

(ب) التغيرات الموسمية ($م_ن$ ، Seasonal Variations) :

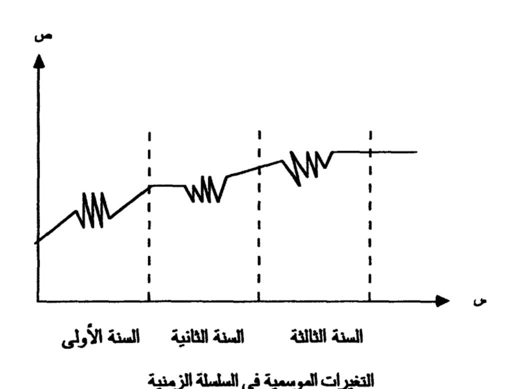
١ – مقدمـــة وتعاريف :

يعرف الموسم بأنه فترة زمنية أقل من سنة (نصف سنة ، ربع سنة / شهر ، أسبوع ، يوم ، ساعة ..).

أما التغيرات الموسمية فيقصد بها التغيرات المنتظمة التى تؤثر على الظاهرة موضوع الدراسة خلال فترات زمنية قصيرة الأجل – أى التغيرات قصيرة الأجل – سواء صعوداً أو هبوطاً ، وقد يعود السبب فى هذه التغيرات

الموسمية إلى العادات الإجتماعية مثل زيادة مبيعات محلات الملابس قبل الأعياء مباشرة ، زيادة مشتريات الكراسات المدرسية قبل وفى بداية دخول المدارس ، أو زيادة عمليات السحب للنقود من البنوك أول كل شهر ، أو بسبب الاجازات كما يزداد بيع تذاكر مشاهدة الأفلام السينمائية والمسرحيات أيام الجمع والآحاد من أيام الأسبوع، أو بسبب الطقس (درجات الحرارة) . فقد تزداد مبيعات الملابس الصيفية أو الشتوية بإختلاف فصول السنة، أيضاً بسبب الأمطار فقد تزداد مبيعات المظلات الواقية من المطر فى فصل الشتاء، أو تزداد مبيعات الفحم للتدفئة فى فصل الشتاء أيضاً ، أو تزداد مبيعات ملابس البحر فى فصل الصيف .. كما تزداد حركة المواصلات الداخلية فى فترتى الصباح والظهيرة من كل يوم بإحدى المدن ، وجدير بالذكر أن التغيرات الموسمية ليست بالضرورة أن يكون إنتظامها كاملاً ويتضح ملامح هذه التغيرات من الشكل التالى:

الشكل رقم (٤٧)



التغيرات الموسمية فى السلسلة الزمنية

وتظهر أهمية دراسات التغيرات الموسمية فى الوصول إلى نموذج يقيس لنا هذه التغيرات أى قياس التغير الموسمى ، وإجراء المقارنات بين تغيرات كل موسم من مواسم السنة ، ومعرفة إلى أى مدى تؤثر هذه التغيرات فى قيم الظاهرة ، وأخيراً مدى إمكانية إستبعاد أثر التغيرات الموسمية لو إردنا .

ولا شك أن الوصول إلى ما سبق سيساعد الإدارات العليا والتنفيذية فى المؤسسات المختلفة – تجارية أو خدمية – فى التخطيط لسنة أو سنتين قادمين بما يساعد على وضع سياسات ناجحة فى مجالات المبيعات والمشتريات والمخزون أو تحديد الأوقات المناسبة للدعاية الإعلانية عن سلعة معينة ، أو التخطيط فى مجالات التمويل والإستثمار وإحتياجات القوى العاملة .... الخ .

٢ – طرق حساب الحركة الموسمية (الدليل الموسمى) :

أولاً : هناك أكثر من طريقة لحساب الحركة الموسمية – أى التأثيرات الموسمية من أهمها:

- طريقة النسب الموسمية (أو الدليل الموسمى) ولها أكثر من صورة منها .

١ – النسب الموسمية التى تستخدم المتوسطات العادية كالوسط الحسابى لكافة قيم الظاهرة أو الوسط الحسابى لكافة القيم بعد حذف أصغر وأكبر قيمة أو الوسيط لمجموعة القيم .

٢ – النسب الموسمية بإستخدام الأوساط المتحركة .

وهوما سنتناوله لبعضها فى الأجزاء التالية ، لكن يجب أن نعلم أنه لكى يتم تقدير أثر الموسم لظاهرة ما يجب أن نؤكد على النقاط التالية :

(أ) تحديد الاتجاه العام – القيمة الاتجاهة للسلسلة الزمنية بطريقة المربعات الصغرى أو المتوسطات المتحركة .

(ب) من الضرورى إستبعاد أثر الاتجاه العام من السلسلة الأصلية قبل تقدير

الحركة الموسمية ، ويتم ذلك بقسمة القيمة الأصلية على القيم الاتجاهية والضرب فى ١٠٠ . فنحصل على نسب القيم الأصلية إلى القيم الاتجاهية.

(جـ) كما يتحتم إيضاً إستبعاد أثر التغيرات العشوائية خلال السنة قبل تقدير الحركة الموسمية ، ويتم ذلك بإستخدام أسلوب المتوسطات على مرحلتين . أولهما عندما نأخذ متوسط المواسم، وثانيهما عند حساب المتوسط العام لمتوسطات المواسم، ذلك لأن حساب المتوسط لأى مجموعة ما هو الا تمهيد لما قد تكون عليه مفردات هذه المجموعة من تذبذبات خلال الفصل أو فصول السنة.

(د) إن الحركة الموسمية يمكن أن تتغير بتغير الزمن، لذا يجب أن تتحدد الفترة الزمنية التى يتم لها تقدير الحركة الموسمية.

(هـ) إذا علمنا قيمة المتوسط لكل موسم من مواسم السنة الأربعة مثلاً لظاهرة ما، فنستطيع تعديل هذه القيم بادخال الأثر الموسمى عليها إذا كانت النسبة الموسمية (الدليل الموسمى) فوق المائة أو باستبعاده منها إذا كانت النسبة الموسمية تحت المائة ، وبذلك نتمكن من التنبؤ بما سوف تكون عليه قيمة الظاهرة فى كل موسم من المواسم فى المستقبل .

(و) فى حالة معلومية القيمة الاتجاهية لظاهرة ما عن السنة كلها فيمكننا تقدير القيمة المتوقعة لهذه الظاهرة لكل موسم من مواسم السنة الأربعة بحساب المتوسطات – أى بقسمة القيمة السنوية على أربعة – ثم ندخل على كل متوسط منها أثر الموسم عليه كما جاء فى البند (هـ).

(ز) يجب أن تكون الظروف المحيطة بمدة السلسلة الزمنية للظاهرة التى نقيس لها التغيرات الموسمية ظروف ثابتة تقريباً، بمعنى أهمية إستبعاد فترات الحروب والإضطرابات وأية تغيرات فجائية فى السياسات الإقتصادية والتجارية لإمكانية الاستفادة من قياس هذه التغيرات فى التخطيط للمشروع فى الأجل القصير .

ثانياً : الحركة الموسمية بإستخدام الوسط الحسابى:

بفرض أن لدينا القيم التالية والتى تم تخليصها من أثر الاتجاه العام.

الموسـم	السنة (١)	السنة (٢)	السنة (٣)	السنة (٤)	السنة (٥)
موسم الشتاء (١)	$س_{١١}$	$س_{٢١}$	$س_{٣١}$	$س_{٤١}$	$س_{٥١}$
موسم الربيع (٢)	$س_{١٢}$	$س_{٢٢}$	$س_{٣٢}$	$س_{٤٢}$	$س_{٥٢}$
موسم الصيف (٣)	$س_{١٣}$	$س_{٢٣}$	$س_{٣٣}$	$س_{٤٣}$	$س_{٥٣}$
موسم الخريف (٤)	$س_{١٤}$	$س_{٢٤}$	$س_{٣٤}$	$س_{٤٤}$	$س_{٥٤}$

وعلية فإن :

١ - متوسط الموسم الأول للسنوات الخمس بالسلسلة ولنرمز له بالرمز :

$$\bar{س}_{١} = \frac{س_{١١} + س_{٢١} + س_{٣١} + س_{٤١} + س_{٥١}}{٥}$$

٢ - متوسط الموسم للفصل الثانى للسنوات الخمس بالسلسلة :

$$\bar{س}_{٢} = \frac{س_{١٢} + س_{٢٢} + س_{٣٢} + س_{٤٢} + س_{٥٢}}{٥}$$

٣ - متوسط الموسم للفصل الثالث للسنوات الخمس بالسلسلة :

$$\bar{س}_{٣} = \frac{س_{١٣} + س_{٢٣} + س_{٣٣} + س_{٤٣} + س_{٥٣}}{٥}$$

٤ - متوسط الموسم للفصل الرابع للسنوات الخمس بالسلسلة:

$$\bar{س}_٤ = \frac{س_{١٤} + س_{٢٤} + س_{٣٤} + س_{٤٤} + س_{٥٤}}{٥}$$

٥ - المتوسط العام للمواسم الأربعة ولنرمز له بالرمز :

$$\bar{\bar{س}} = \frac{\bar{س}_١ + \bar{س}_٢ + \bar{س}_٣ + \bar{س}_٤}{٤}$$

وعليه فإن : نسبة أى موسم (دليل أى موسم) = $\frac{\text{متوسط الموسم}}{\text{المتوسط العام للمواسم}} \times ١٠٠$

* نسبة الموسم الأول (دليل الموسم الأول) = $\frac{\bar{س}_١}{\bar{\bar{س}}} \times ١٠٠$

* نسبة الموسم الثانى (دليل الموسم الثانى) = $\frac{\bar{س}_٢}{\bar{\bar{س}}} \times ١٠٠$

* نسبة الموسم الثالث (دليل الموسم الثالث) = $\frac{\bar{س}_٣}{\bar{\bar{س}}} \times ١٠٠$

* نسبة الموسم الرابع (دليل الموسم الرابع) = $\frac{\bar{س}_٤}{\bar{\bar{س}}} \times ١٠٠$

مثـال (١٠) :

القيم التالية تبين كمية المبيعات الربع سنوية (بالألف وحدة) لإحدى الشركات عن المدة ١٩٩٥ - ١٩٩٩ (مخلصة من أثر الاتجاه العام).

جـــــدول (٢٨)

السنة / الموسم	١٩٩٥	١٩٩٦	١٩٩٧	١٩٩٨	١٩٩٩
الشتاء (١)	١٩	٢٠	١٩	١٨	٢٠
الربيع (٢)	٢٥	٢٤	٢٦	٢٥	٢٤
الصيف (٣)	٣٢	٣٣	٣١	٣٣	٣٢
الخريف (٤)	٢٦	٢٥	٢٤	٢٥	٢٧

والمطلوب:

١ – حساب الحركة الموسمية (الدليل الموسمى) للمبيعات الفصلية .

٢ – تخليص الظاهرة (المبيعات) من أثر الموسم فى الفصول الأربعة من السنة الأولى (١٩٩٥).

الحـل:

١ – حساب الدليل الموسمى للمبيعات الفصلية

جـــــــدول (٢٩)

البيـــانـــات						المجموع	خطـوات الحســاب	
السنة / الفصل	١٩٩٥	١٩٩٦	١٩٩٧	١٩٩٨	١٩٩٩		متوسط الفصل أو الموسم (س̄)	نسبة الفصل (*) (دليل الموسم)
(١)	١٩	٢٠	١٩	١٨	٢٠	٩٦	٩٦ ÷ ٥ = ١٩,٢	١٩,٢ / ٢٥,٤ × ١٠٠ = ٧٦٪
(٢)	٢٥	٢٤	٢٦	٢٥	٢٤	١٢٤	١٢٤ ÷ ٥ = ٢٤,٨	٢٤,٨ / ٢٥,٤ × ١٠٠ = ٩٧٪
(٣)	٣٢	٣٣	٣١	٣٣	٣٢	١٦١	١٦١ ÷ ٥ = ٣٢,٢	٣٢,٢ / ٢٥,٤ × ١٠٠ = ١٢٧٪
(٤)	٢٦	٢٥	٢٤	٢٥	٢٧	١٢٧	١٢٧ ÷ ٥ = ٢٥,٤	٢٥,٤ / ٤٥,٤ × ١٠٠ = ١٠٠٪
							المتوسط العام س̿ = ١٠١٦ ÷ ٤ = ٢٥,٤	المجموع ٤٠٠٪ ٤٠٠٪ / ٤ = ١٠٠٪ (**)

(*) يطلق عليه البعض الرقم القياسى للتغييرات الموسمية .

(**) لاحظ أن مجموع النسب الموسمية الأربعة = ٤٠٠ وهذا منطقياً حيث أن المؤثرات الموسمية لابد أن تعادل بعضها خلال فترة عام وهذا يعنى أيضاً أنه إذا كانت مبيعات المواسم كلها متساوية فإن التغيرات الموسمية تكون معدومة (لا تأثير لها) .

تفسر النتائج السابقة كما يلى :

١ – أن متوسط المبيعات خلال فصل الشتاء (١) ، (١٩,٢) ألف وحدة تكون ٧٦٪ من المتوسط العام للمبيعات خلال الفصل الواحد بأعوام السلسلة (٢٥,٤ ألف وحدة) وهذا يعنى أن متوسط المبيعات فى هذا الفصل يقل عن المتوسط العام بنسبة ٢٤٪.

٢ – أن متوسط المبيعات خلال فصل الربيع (٢)، (٢٤,٨ ألف وحدة تكون ٩٧٪ من المتوسط العام للمبيعات خلال الفصل الواحد بأعوام السلسلة (٢٥,٤ ألف وحدة) وهذا يعنى أن متوسط المبيعات فى هذا الفصل تقل عن المتوسط العام للمبيعات بنسبة ٣٪ فقط.

٣ – أن متوسط المبيعات خلال فصل الصيف (٣) ، (٣٢,٢ ألف وحدة) تكون ١٢٧٪ من المتوسط العام للمبيعات خلال الفصل الواحد بالعام من سنوات السلسلة (٢٥,٤ ألف وحدة)؛ وهذا يعنى أن متوسط المبيعات فى هذا الفصل تزيد عن المتوسط العام للمبيعات بنسبة ٢٧٪.

٤ – أن متوسط المبيعات خلال فصل الخريف (٤) ، (٢٥,٤ ألف وحدة) وتكون ١٠٠٪ من المتوسط العام للمبيعات خلال الفصل الواحد بأعوام السلسلة ونلاحظ أن مبيعات هذا الفصل تساوى المتوسط العام للمبيعات أى ليس هناك تأثير موسمى على المبيعات فى هذا الفصل .

كما يتبين لنا أيضاً أن المبيعات تبلغ حدها الأقصى فى الفصل الثالث وحدها الأدنى فى الفصل الأول .

ثالثاً : تخليص الظاهرة (المبيعات) من الأثر الموسمى :

من الممكن تخليص الظاهرة من أثر التغيرات الموسمية بنفس طريقة تخليص الظاهرة من أثر الاتجاه العام كما يلى :

قيمة الظاهرة بعد تخليصها من أثر التغيرات الموسمية ($م_ن$) أى من أثر الموسم:

$$= \frac{\text{قيمة الظاهرة الأصلية للموسم بعد تخليصها من أثر الاتجاه العام}}{\text{النسبة الموسمية (الدليل الموسمى) بهذا الموسم}}$$

وعليه فإنه : لتخليص المبيعات من تأثير الفصول المختلفة لعام ١٩٩٥ فى هذا المثال،أى قيمة المبيعات اللاموسمية (دون التأثير الموسمى) فى فصل الشتاء (١) عام ١٩٩٥ .

$$= \frac{١٩}{٠,٧٦} = ٢٥ \text{ ألف وحده}$$

قيمة المبيعات اللاموسمية فى فصل الربيع (٢) عام ١٩٩٥ .

$$= \frac{٢٥}{٠,٩٧} = ٢٥,٧٧٣ \text{ ألف وحدة}$$

قيمة المبيعات اللاموسمية فى فصل الصيف (٣) عام ١٩٩٥

$$= \frac{٣٢}{١,٢٧} = ٢٥,٢٩٧ \text{ ألف وحدة}$$

قيمة المبيعات اللاموسمية فى فصل الخريف (٤) عام ١٩٩٥

$$= \frac{٢٦}{١٠٠} = ٢٦ \text{ ألف وحدة.}$$

وبذلك يتبين لنا أن المبيعات اللاموسمية – دون تأثر الموسم – تبلغ حدها الاقصى فى الفصل الرابع من السنة وحدها الأدنى فى الفصل الأول من السنة .

رابعاً : إستخدام الدليل الموسمى فى التنبؤ :

كما أمكن إستخدام الاتجاه العام فى التنبؤ بالقيم الاتجاهية فى المدى الطويل ، يمكن إستخدام التغيرات الموسمية فى التنبؤ أيضاً لكن فى المدى القصير – فترات أقل من سنة – أى فى التنبؤ بمقدار التغيرات الموسمية فى سنوات مقبلة والتخطيط لذلك، فإذا أمكننا التنبؤ بالقيمة الاتجاهية للسلسلة الزمنية (بإستخدام طريقة المربعات الصغرى مثلاً) لسنة محددة فى المستقبل ولتكن فى مثالنا السابق (رقم ١٠) بمبيعات عام ٢٠٠٠ والتى بلغت ١١٠ ألف وحده – فإنه يمكننا التنبؤ بقية المبيعات لكل فصل من فصول نفس السنة على حدة كما يلى : تقديرات الفصل (الموسم) :

$$= \text{تقديرات مبيعات السنة} \times \frac{\text{دليل الفصل (الموسم)}}{\text{مجموع الفصول (الموسم)}}$$

$$\text{تقدير المبيعات فى الفصل (١) عام ٢٠٠٠} = ١١٠ \times \frac{٧٦}{٤٠٠} = ٢٠,٩ \text{ ألف وحدة}$$

$$\text{تقدير المبيعات فى الفصل (٢) عام ٢٠٠٠} = ١١٠ \times \frac{٩٧}{٤٠٠} = ٢٦,٦٧٥ \text{ ألف وحدة}$$

$$\text{تقدير المبيعات فى الفصل (٣) عام ٢٠٠٠} = ١١٠ \times \frac{١٢٧}{٤٠٠} = ٣٤,٩٢٥ \text{ ألف وحدة}$$

$$\text{تقدير المبيعات فى الفصل (٤) عام ٢٠٠٠} = ١١٠ \times \frac{١٠٠}{٤٠٠} = ٢٧,٥ \text{ ألف وحدة}$$

الحركة الموسمية بإستخدام الوسيط ($ر_٢$) :

يمكن إستخدام الوسيط فى حساب النسب الموسمية (الدليل الموسمى) خاصة فى حالات القيم الشاذة أو المتطرفة لأن إستخدام الوسط الحسابى فى الحالة السابقة يعتبر مقياساً غير دقيق،كما يلى :

١ - يتم الحصول على الوسيط لكل فصل بعد ترتيب القيم الفصلية للظاهرة فى الفصل الواحد خلال سنوات السلسلة ترتيباً تصاعدياً أو ترتيبياً تنازلياً ، وبالطبع القيمة الوسيطية ستكون هى القيمة الوسطى بعد الترتيب المشار إليه عالية .

٢ - يتم الحصول على الوسط العام لجميع القيم الوسيطية للفصول المختلفة :

$$\text{أى الوسط العام} = \frac{\text{مجموع القيم الوسيطية للفصول}}{\text{عدد الفصول}}$$

$$\text{٣ - النسبة الموسمية (الدليل الموسمى)} = \frac{\text{الوسيط لأى فصل}}{\text{الوسط العام}} \times ١٠٠$$

مثـال (١١) :

إحسب الحركة الموسمية فى المثال رقم (١٠) السابق بإستخدام أسلوب الوسيط.

الحـل :

الجدول التالى يعرض الكميات المباعة خلال الفصول الأربعة سنوات السلسلة الزمنية مرتبة تصاعدياً ، كما يبين الجدول أيضاً وسيط الموسم، والنسب الموسمية (أو الدليل الموسمى) .

جـــــدول (٣٠)

البيـان / الفصل	الكميـات الفصـلية المباعـة مرتبـة تصـاعديـاً	وسيط الكميات المباعة (ر٢)	النسب الموسمية (الدليل الموسمى)
فصل الشتاء (١)	١٨ ، ١٩ ، (١٩) ، ٢٠ ، ٢٠	١٩	١٩ / ٢٥,٢٥ × ١٠٠ = ٧٥,٣٪
فصل الربيع (٢)	٢٤ ، ٢٤ ، (٢٥) ، ٢٥ ، ٢٦	٢٥	١٩ / ٢٥,٢٥ × ١٠٠ = ٩٩٪
فصل الصيف (٣)	٣١ ، ٣٢ ، (٣٢) ، ٣٣ ، ٣٣	٣٢	٣٢ / ٢٥,٢٥ × ١٠٠ = ١٢٦,٧٪
فصل الخريف (٤)	١٤ ، ٢٥ ، (٢٥) ، ٢٦ ، ٢٧	٢٥	٢٥ / ٢٥,٢٥ × ١٠٠ = ٩٩٪
			٤٠٠٪
المجمـوع	الوسـط العـام	١٠١ ١٠١ / ٤ = ٢٥,٢٥	١٠٠٪

وبنفس الطريقة السابقة يمكن (بإستخدام الدليل الموسمى الجديد) والذى أختلف إلى حد ما – عن الأدلة الموسمية بإستخدام الوسط الحسابى – السابقة .

١ – التخلص من التأثير الموسمى .

٢ – التنبؤ بقيم المبيعات خلال الفصول المختلفة عام ٢٠٠٠ .

إستبعاد أثر الاتجاه العام والموسم معاً (باستخدام نموذج حاصل الضرب).

حيث سبق أن أوضحنا أن :

$$ص_ن = ت_ن \times م_ن \times د_ن \times ع_ن$$

وعليه فإنه بالتخلص من تأثيرات الاتجاه العام وتأثيرات الموسم على السلسلة الزمنية فإننا نصل إلى تأثير التغيرات الدورية والعرضية.

أى أن :

التغيرات الدورية والعرضية .

$$د_ن \times ع_ن = \frac{ص_ن}{ت_ن \times م_ن}$$

(حـ) التغـيرات العرضــيــة ($ع_ن$) : ***Irregular Variations***

أن التغيرات العشوائية أو العرضية ، هى التغيرات التى تقع نتيجة أسباب طارئة،ولا تحدث مفعولها طبقاً لقاعدة ثابته أو تأثير ثابت على قيم السلسلة الزمنية ، فقد يكون التأثير تارة بالزيادة وتارة بالنقص على فترات قصيرة ، كما أن فجائية عوامل حدوثها تجعل من الصعوبة بمكان التنبؤ بها أى تقديرها من حيث حجمها واتجاهها ، ومن أهم عوامل حدوثها الحروب والاضطرابات والزلازل والاعاصير والأوبئة والتى تؤثر على المستوى الاقتصادى للبلاد مثلاً، وللأسباب السابقة فإنه باستخدام أسلوب المتوسطات المتحركة فإننا نتخلص من مثل هذه التغيرات العرضية إن وجدت، وبالتالى فإن قيمة المتوسطات المتحركة الناتجة تعبير مقبول للتغيرات الدورية فى السلاسل الزمنية السنوية.

(د) التـغـيرات الدوريـة (*) ($د_ن$) :

وهو مؤثرات صاعدة أو هابطةعن قيم الاتجاه العام للسلسلة الزمنية خلال فترات زمنية طويلة يطلق عليها دورة يتراوح طولها ما بين ٣ – ١٥ سنة، وهى تشبه التغيرات الموسمية من حيث تكرارها لكن بطريقة غير منتظمة فى كثير من الأحيان وذلك لاختلاف طول الدورة وحدتها ، ومن أهم أسباب هذه التغيرات كل من العلاقات الدولية والسياسات الحكومية ، وكذا التغير فى عرض السلع والخدمات والطلب عليها ... الخ ، ومن أهم أمثلتها دورات الأعمال فى

(*) تعرف أيضاً بالنسب الدورية نظراً لأنه يتم التعبير عنها كنسب من القيم الاتجاهية.

النظام الرأسمالى حيث يقع تأثير هذه التغيرات فى كل من فترات الرواج والكساد الاقتصادى، ولذا تحدد دورة التغيرات الدورية بالفترة بين قاعى موجتين متتاليين أو قيمتين متتاليتين من موجات دورات الكساد أو الرواج الاقتصادى، وتظهر أهمية دراسة التغيرات الدورية بالسلاسل الزمنية فى قياس أثر التغيرات الدورية ، والتنبؤ بوقوع مثل هذه التغيرات تمهيداً لعمل خطة لمواجهة التأثيرات الخطرة منها،بجانب التفكير فى وضع حلول للمشاكل التى تنجم عنها عند حدوثها .

ويمعنى آخر أنها تعتبر أداة نافعة فى رسم سياسات مستقبلية تعمل على ثبات مستوى الحالة الاقتصادية محلياً ودولياً .

وأخيراً يجب أن ننوه هنا أنه عند تحليل السلاسل الزمنية لتقدير التغيرات الدورية يجب أن تفرق بين ما إذا كانت :

١ – بيانات السلسلة الزمنية موضوع الدراسة سنوية،

٢ – أو بيانات السلسلة الزمنية موضوع الدراسة ، شهرية أو فصلية .

ففى الحالة الأولى (السلسلة السنوية) فإن السلسلة الزمنية للظاهرة تكون تحت تأثير كل من ، تغيرات الاتجاه العام ($ت_ن$) ، والتغيرات الدورية ($د_ن$) ، وعليه فإنه بأخذ المتوسطات المتحركة للقيم الأصلية وقسمتها على القيم الاتجاهية المناظرة نكون قد تخلصنا من التأثيرات للاتجاه العام والتأثيرات العرضية، ويكون الناتج التأثيرات الدورية فقط .

أما فى الحالة الثانية (السلسلة فصلية أو شهرية) فإن هذه السلسلة الزمنية للظاهرة تكون تحت تأثير كل من التغيرات الأربعة ، الاتجاه العام ($ت_ن$) ، والتغيرات الموسمية ($م_ن$) ، والتغيرات العشوائية ($ع_ن$) ، والتغيرات الدورية ($د_ن$)

ومن ثم يتطلب الأمر للوصول إلى التغيرات الدورية ، التخلص من كل من تأثيرات الاتجاه العام (تن) ، ثم التأثيرات الموسمية (من) وأخيراً التأثيرات العرضية (عن) وذلك. بأخذ المتوسط المتحرك لكل من (عن ، دن) وبالتالى نصل إلى التغيرات الدورية ،والتخلص من التأثير الموسمى فى المثال رقم (١٠) السابق – أى للوصول إلى قيم التغيرات العشوائية والدورية من الجدول التالى وفقاً لما جاء بالحل السابق للسلسلة الزمنية .

جـــــدول رقم (٣١)

(بالألف وحدة)

الفصل / السنة	١٩٩٥	١٩٩٦	١٩٩٧	١٩٩٨	١٩٩٩	النسب الموسمية (الدليل الموسمى)
(١)	٢٥,—	٢٦,٣١٦	٢٥,—	٢٣٦٨٤	٢٦,٣١٦	٪٧٦
(٢)	٢٥,٧٧٣	٢٤,٧٤٢	٢٦,٨٠٤	٢٥,٧٣	٢٤,٧٤٢	٪٩٧
(٣)	٢٥,١٩٧	٢٥,٩٨٤	٢٤,٤٠٩	٢٥,٩٨٤	٢٥,١٩٧	٪١٢٧
(٤)	٢٦,—	٢٥,—	٢٤,—	٢٥,—	٢٧,٠٠٠	٪١٠٠

وللتخلص من التغيرات العشوائية (عن) للوصول إلى قيم التغيرات الدورية (د ن) نقوم بالاجراء التالى (*).

جـــــدول (٣٢)

السنة بالفصـــول	(م ن ×ع ن ×ع ن)	القيم اللاموسمية (ع ن × د ن) (**)	المجموع المتحرك لدورة طولها ٣ فصول	الأوساط المتحركة لدورة طولها ٣ فصول	القيم الدورية (د ن)
(١)	(٢)	(٣)	(٤)	(٥)	(٦)
١٩٩٥					وهي الأوســـاط المتحـركـة في العمـود السـابق (٥)
(١)	١٩	٢٥,——	——	——	
(٢)	٢٥	٢٥.٧٧٣	٧٥,٩٧٠	٢٥,٣٢٣	
(٣)	٣٢	٢٥,١٩٧	٧٦,٩٧٠	٢٥,٦٥٧	
(٤)	٢٦	٢٦,——	٧٧,٥١٣	٢٥,٨٣٨	
١٩٩٦					
(١)	٢٠	٢٦,٣١٦	٧٧,٠٥٨	٢٥,٦٨٦	
(٢)	٢٤	٢٤,٧٤٢	٧٦,٧٧٢	٢٥,٥٩١	
(٣)	٣٣	٢٥,٩٨٤	٧٥,٧٢٦	٢٥,٢٤٢	
(٤)	٢٥	٢٥,——	٧٥,٩٨٤	٢٥,٣٢٨	
١٩٩٧					
(١)	١٩	٢٥,——	٧٦,٨٠٤	٢٥,٦٠١	
(٢)	٢٦	٢٦,٨٠٤	٧٦,٢١٣	٢٥,٤٠٤	
(٣)	٣١	٢٤,٤٠٩	٧٥,٢١٣	٢٥,٠٧١	
(٤)	٢٤	٢٤,——	٧٢,٠٩٣	٢٤,٠٣١	
١٩٩٨					
(١)	١٨	٢٣,٦٨٤	٧٣,٤٥٧	٢٤,٤٨٦	
(٢)	٢٥	٢٥,٧٧٣	٧٥,٤٤١	٢٥,١٤٧	
(٣)	٣٣	٢٥,٩٨٤	٧٦,٧٥٧	٢٥,٥٨٦	
(٤)	٢٥	٢٤,——	٧٧,٣٠٠	٢٥,٧٦٧	
١٩٩٩					
(١)	٢٠	٢٦,٣١٦	٧٦,٠٥٨	٢٥,٣٥٣	
(٢)	٢٤	٢٤,٧٤٢	٧٦,٢٥٥	٢٥,٤١٨	
(٣)	٣٢	٢٥,١٩٧	٧٦,٩٣٩	٢٥,٦٤٦	
(٤)	٢٧	٢٧,——	——	——	

(*) القيم الفصلية الأصلية كانت مخلصة من الاتجاه العام.

(**) من الجدول رقم (٢٩) السابق.

ويمقارنة العمود رقم (٣) [$ع_{ن} \times د_{ں}$] بالعمود (٥) [$د_{ن}$] فى كافة الفصول نجد أنه محدود جداً ، أى أن التأثيرات العرضية هنا محدودة جداً بالقياس بالقيمة الأصلية مخلصة من القيم الاتجاهية بالعمود رقم (٢) أى بالتأثيرات الموسمية .

تمـاريـن (٩)

١ – فيما يلى عدد المواليد السنوية ، والوفيات السنوية فى ج. م. ع خلال المدة من ١٩٨٠ – ١٩٩٤ .

(بالالف نسمة)

البيان / السنة	١٩٨٠	١٩٨١	١٩٨٢	١٩٨٣	١٩٨٤	١٩٨٥	١٩٨٦	١٩٨٧	١٩٨٨	١٩٨٩	١٩٩٠	١٩٩١	١٩٩٢	١٩٩٣	١٩٩٤
المواليد	١٥٨٠	١٦٠٤	١٦١٢	١٦٨٤	١٨١٥	١٩٢٢	١٩٢٨	١٩٢٣	١٩٢٣	١٧٤٣	١٧١٧	١٦٦٢	١٦٨٩	١٦٧٠	١٧٤٦
الوفيات	٤٢٣	٤٣٤	٤٤٤	٤٤٥	٤٤٧	٤٥٦	٤٥٨	٤٦٨	٤٢٩	٤١٧	٣٩٥	٣٩٣	٤٣٠	٤٠٧	٤١٧

والمطلوب :

١ – تمثيل كل من السلسلتين بيانياً للوصول إلى المنحنى التاريخى لهما.

٢ – قياس الاتجاه العام للمواليد بإستخدام طريقة أشباة المتوسطات .

٣ – قياس معادلة الاتجاه العام للوفيات بإستخدام طريقة المربعات الصغرى .

أولاً : باعتبار سنة الأساس عام (١٩٨٠).

ثانياً : بإعتبار سنة الأساس منتصف السلسلة الزمنية .

٤ – تخليص الوفيات من الاتجاه العام عن الأعوام ٨٢ ، ٨٨ ، ٩٤.

٥ – توقع الوفيات عن عامى ١٩٩٧ ، ٢٠٠٠ .

٢ – فيما يلى الإنتاج الزراعى للمحصولين أ ، ب بإحدى الدول خلال المدة من ١٩٨٩ – ١٩٩٤.

البيان / السنة	١٩٨٩	١٩٩٠	١٩٩١	١٩٩٢	١٩٩٣	١٩٩٤
المواليد (أ)	١٤٨	٨٩	٤١	٥٨	٧١	١١٠
الوفيات (ب)	٨٥	٧٣	٧٦	٦٦	٨٨	٧٠

المطلوب :

١ – قياس معادلة الاتجاه العام لكلا المحصولين بطريقتين مختلفتين .

٢ – تمثيل القيم الأصلية والقيم الاتجاهية (أ ، ب) بيانياً .

٣ – الجدول التالى يمثل إجمالى الأجور بالمليون جنيه بميزانية الدولة حسب القطاعات خلال الفترة من ١٩٨٧/٨٦ – ١٩٩٢/٩١ .

القطاعات / السنة	١٩٨٧/١٩٨٦	١٩٨٨/١٩٨٧	١٩٨٩/١٩٨٨	١٩٩٠/١٩٨٩	١٩٩١/١٩٩٠	١٩٩٢/١٩٩١
السلعية	→ ٦٦٦١	→ ٧٨١٣	→ ٨٩٨٩	→ ١٠٣٢٨	→ ١١٨٦٨	→ ١٣٦٨٤
الخدمات الإنتاجية	٢٨٣٦	٤٧٦٢	٥٥٠٠	٦٣٩٣	٧٤٧١	٨٧٣٦
الخدمات الاجتماعية	٥٨٨٢	٧٠٤٢	٧٩٦٤	٩٠٩٩	١٠٤٩١	١١٨٢٧
الإجمالى العام	١٦٣٧٩	١٩٦١٧	٢٢٤٥٣	٢٥٨٢٠	٢٩٨٣٠	٣٤٢٤٧

والمطلوب :

١ – تقدير معادلة الاتجاه العام للقطاعات السلعية بإستخدام طريقة التمهيد باليد .

٢ – تقدير معادلة الاتجاه العام لقطاعات الخدمات الإنتاجية بإستخدام أشباه المتوسطات .

٣ – تقدير الاتجاه العام للقطاعات الاجتماعية بإستخدام الأوساط المتحركة.

٤ – تقدير معادلة الاتجاه العام للقطاعات الاجتماعية بإستخدام طريقة المربعات الصغرى.

٤ – فيما يلى قيمة المبيعات لإحدى الشركات سنوياً (بملايين الجنيهات). فى الفترة من ١٩٨٥ – ١٩٩١.

السنة	١٩٨٠	١٩٨١	١٩٨٢	١٩٨٣	١٩٨٤	١٩٨٥	١٩٨٦	١٩٨٧	١٩٨٨	١٩٨٩	١٩٩٠	١٩٩١
القيمة	٢	٣	٨	٩	٦	٧	١٢	١٣	١٠	١١	١٦	١٧

والمطلوب:

١ – توفيق خط الاتجاه العام للمبيعات بإستخدام طريقة المربعات الصغرى إذا اتخذت (أ) سنة الأساس (١٩٨٠) (ب) سنة الأساس منتصف السلسلة.

٢ – تخليص الظاهرة من أثر الاتجاه العام.

٣ – قياس الخطأ المعيارى للتقدير.

٤ – تقدير المبيعات عامى ١٩٩٤، ١٩٩٧.

٥ – قياس القيمة الاتجاهية للمبيعات بإستخدام الوسط المتحرك فى تمرين رقم (٣) السابق فى حالتين:

(أ) طول الدورة (٣) سنوات، وطول الدورة (٤) سنوات.

(ب) تخليص الظاهرة من أثر الاتجاه العام.

٦ - **المطلوب :**

(أ) تحديد معادلة الاتجاه العام للسلسلة الزمنية التالية بإستخدام أشباة المتوسطات (متوسطى نصفى السلسلة) بفرض أنه مستقيم .

السنة	١٩٨٠	١٩٨١	١٩٨٢	١٩٨٣	١٩٨٤	١٩٨٥	١٩٨٦	١٩٧٧	١٩٨٨	١٩٨٩
متوسط نصيب الفرد من الدخل بالدولار	٤١٤	٤٤٦	٤٦٢	٤٦٣	٥٠١	٥٢١	٥٢٥	٥٥٤	٥٧٩	٦١٥

(ب) التنبؤ بمتوسط نصيب الفرد من الدخل بالدولار عامى ١٩٩١ ، ١٩٩٥ بأكثر من طريقة.

٧ – فيما يلى عدد الطلبة المقيدين بكليات التجارة فى ج. م. ع خلال الفترة من ٨٨ / ١٩٨٩ – ٩٣/١٩٩٤.

السنة	١٩٨٩/١٩٨٨	١٩٩٠/١٩٨٩	١٩٩١/١٩٩٠	١٩٩٢/١٩٩١	١٩٩٣/١٩٩٢	١٩٩٤/١٩٩٣
عدد الطلبة	١٢٤٢١٨	١١٤٥٠١	١٠٧٠٨٨	٩٩٣٧٠	١١٤١٨١	١٣٢٥٠٠

والمطلوب :

١ – تحديد معادلة الاتجاه العام لهؤلاء الطلاب بإستخدام طريقة المربعات الصغرى.

٢ – تقدير عدد الطلاب بكليات التجارة عن عامى ٩٦/٩٧ ، ٩٨/١٩٩٩ وفقاً للسلسلة السابقة.

٨ – فيما يلى سلسلة زمنية ربع سنوية (فصلية) لإنتاج أحد المصانع خلال الفترة من ١٩٩٣ – ١٩٩٧ (بالمليون وحدة).

الفصل \ السنة	١٩٩٣	١٩٩٤	١٩٩٥	١٩٩٦	١٩٩٧
الأول	٩٠,٥	٨٩,٤	٩٣,٨	٩٣,٨	٩٧,٦
الثانى	٧٩,٦	٨٠,٥	٨١,٧	٩٢,٣	٨٣,٢
الثالث	٧٧,٦	٧٨,٥	٨١,٥	٨٦,٥	٧٩,-
الرابع	٨٦,٤	٨٩,٢	٨٩,١	٩٣,٧	٨٩,٣

والمطلوب :

(أ) تقدير الحركة الموسمية للسلسلة الزمنية.
(ب) تخليص الظاهرة من أثر الموسم عن الفصول الأربعة لعام ١٩٩٧ .
(جـ) تخليص الظاهرة من التغيرات العشوائية .
(د) تقدير التغيرات الدورية عن سنوات السلسلة.

٩ – فيما يلى الإستهلاك الفصلى من البترول بآلاف البراميل بإحدى الدول خلال أربع سنوات .

الفصل \ السنة	١٩٩٥	١٩٩٦	١٩٩٧	١٩٩٨
الأول	٣٣	٣٣	٣٧	٣٢
الثانى	٤١	٣٨	٤٠	٤٢
الثالث	٤٢	٤٥	٥٠	٥٢
الرابع	٣٩	٤٠	٤١	٤٤

والمطلوب :

(أ) حساب معادلة الاتجاه العام بإستخدام طريقة المربعات الصغرى بفرض أنه خط مستقيم.

(ب) تخليص الظاهرة من تأثير الإتجاه العام.

(جـ) حساب الحركة الموسمية.

(د) تخليص الظاهرة من التأثير الموسمى فقط .

(هـ) حساب كل من التأثيرات العشوائية والدورية.

(و) التخلص من التأثيرات العشوائية.

(ز) تقدير القيمة الاتجاهية للإستهلاك عام ٢٠٠١ .

(ح) تقدير القيم الموسمية للإستهلاك خلال عام ٢٠٠١ .

جـــداول

(أ) جدول لوغاريتمات الاعداد لأربعة أرقام عشرية

(ب) جدول الاعداد العشوائية

لوغاريتمات الأعداد بأربعة أرقام عشرية

العدد	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧
١٠	٠٠٠٠	٠٠٤٣	٠٠٨٦	٠١٢٨	٠١٧٠	٠٢١٢	٠٢٥٣	٠٢٩٤
١١	٠٤١٤	٠٤٥٣	٠٤٩٢	٠٥٣١	٠٥٦٩	٠٦٠٧	٠٦٤٥	٠٦٨٢
١٢	٠٧٩٢	٠٨٢٨	٠٨٦٤	٠٨٩٩	٠٩٣٤	٠٩٦٩	١٠٠٤	١٠٣٨
١٣	١١٣٩	١١٧٣	١٢٠٦	١٢٣٩	١٢٧١	١٣٠٣	١٣٣٥	١٣٦٧
١٤	١٤٦١	١٤٩٢	١٥٢٣	١٥٥٣	١٥٨٤	١٦١٤	١٦٤٤	١٦٧٣
١٥	١٧٦١	١٧٩٠	١٨١٨	١٨٤٧	١٨٧٥	١٩٠٣	١٩٣١	١٩٥٩
١٦	٢٠٤١	٢٠٦٨	٢٠٩٥	٢١٢٢	٢١٤٨	٢١٧٥	٢٢٠١	٢٢٢٧
١٧	٢٣٠٤	٢٣٣٠	٢٣٥٥	٢٣٨٠	٢٤٠٥	٢٤٣٠	٢٤٥٥	٢٤٨٠
١٨	٢٥٥٣	٢٥٧٧	٢٦٠١	٢٦٢٥	٢٦٤٨	٢٦٧٢	٢٦٩٥	٢٧١٨
١٩	٢٧٨٨	٢٨١٠	٢٨٣٣	٢٨٥٦	٢٨٧٨	٢٩٠٠	٢٩٢٣	٢٩٤٥
٢٠	٣٠١٠	٣٠٣٢	٣٠٥٤	٣٠٧٥	٣٠٩٦	٣١١٨	٣١٣٩	٣١٦٠
٢١	٣٢٢٢	٣٢٤٣	٣٢٦٣	٣٢٨٤	٣٣٠٤	٣٣٢٤	٣٣٤٥	٣٣٦٥
٢٢	٣٤٢٤	٣٤٤٤	٣٤٦٤	٣٤٨٣	٣٥٠٢	٣٥٢٢	٣٥٤١	٣٥٦٠
٢٣	٣٦١٧	٣٦٣٦	٣٦٥٥	٣٦٧٤	٣٦٩٢	٣٧١١	٣٧٢٩	٣٧٤٧
٢٤	٣٨٠٢	٣٨٢	٢٨٣٨	٣٨٥٦	٣٨٧٤	٣٨٩٢	٣٩٠٩	٣٩٢٧
٢٥	٣٩٧٩	٣٩٩٧	٤٠١٤	٤٠٣١	٤٠٤٨	٤٠٦٥	٤٠٨٢	٤٠٩٩
٢٦	٤١٥٠	٤١٦٦	٤١٨٣	٤٢٠٠	٤٢١٦	٤٢٣٢	٤٢٤٩	٤٢٦٥
٢٧	٤٣١٤	٤٣٣٠	٤٣٤٦	٤٣٦٢	٤٣٧٨	٤٣٩٣	٤٤٠٩	٤٤٢٥
٢٨	٤٤٧٢	٤٤٨٧	٤٥٠٢	٤٥١٨	٤٥٣٣	٤٥٤٨	٤٥٦٤	٤٥٧٩
٢٩	٤٦٢٤	٤٦٣٩	٤٦٥٤	٤٦٦٩	٤٦٨٣	٤٦٩٨	٤٧١٣	٤٧٢٨
٣٠	٤٧٧١	٤٧٨٦	٤٨٠٠	٤٨١٤	٤٨٢٩	٤٨٤٣	٤٨٥٧	٤٨٧١
٣١	٤٩١٤	٤٩٢٨	٤٩٤٢	٤٩٥٥	٤٩٦٩	٤٩٨٣	٤٩٩٧	٥٠١١
٣٢	٥٠٥١	٥٠٦٥	٥٠٧٩	٥٠٩٢	٥١٠٥	٥١١٩	٥١٣٢	٥١٤٥
٣٣	٥١٨٥	٥١٩٨	٥٢١١	٥٢٢٤	٥٢٣٧	٥٢٥٠	٥٢٦٣	٥٢٧٦
٣٤	٥٣١٥	٥٣٢٨	٥٣٤٠	٥٣٥٣	٥٣٦٦	٥٣٧٨	٥٣٩١	٥٤٠٤

(تابـع) لوغاريتمات الأعداد لأربعة أرقام عشرية

٨	٩	الفروق ١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
٠٣٣٤	٠٣٧٤	٤	٨	١٢	١٧	٢١	٢٥	٢٩	٣٣	٣٧
٠٧١٩	٠٧٥٥	٤	٨	١١	١٥	١٩	٢٣	٢٦	٣٠	٣٤
١٠٧٢	١١٠٦	٣	٧	١٠	١٤	١٧	٢١	٢٤	٢٨	٣١
١٣٩٩	١٤٣٠	٣	٦	١٠	١٣	١٦	١٩	٢٣	٢٦	٢٩
١٧٠٣	١٧٣٢	٣	٦	٩	١٢	١٥	١٨	٢١	٢٤	٢٧
١٩٨٧	٢٠١٤	٣	٦	٨	١١	١٤	١٧	٢٠	٢٢	٢٥
٢٢٥٣	٢٢٧٩	٣	٥	٨	١١	١٣	١٦	١٨	٢١	٢٤
٢٥٠٤	٢٥٢٩	٢	٥	٧	١٠	١٢	١٥	١٧	٢٠	٢٢
٢٧٤٢	٢٧٦٥	٢	٥	٧	٩	١٢	١٤	١٦	١٩	٢١
٢٩٦٧	٢٩٨٩	٢	٤	٧	٩	١١	١٣	١٦	١٨	٢٠
٣١٨١	٣٢٠١	٢	٤	٦	٨	١١	١٣	١٥	١٧	١٩
٣٣٨٥	٣٤٠٤	٢	٤	٦	٨	١٠	١٢	١٤	١٦	١٨
٣٥٧٩	٣٥٩٨	٢	٤	٦	٨	١٠	١٢	١٤	١٥	١٧
٣٧٦٦	٣٧٨٤	٢	٤	٦	٧	٩	١١	١٣	١٥	١٧
٣٩٤٥	٣٩٦٢	٢	٤	٥	٧	٩	١١	١٢	١٤	١٦
٤١١٦	٤١٣٣	٢	٣	٥	٧	٩	١٠	١٢	١٤	١٥
٤٢٨١	٤٢٩٨	٢	٣	٥	٧	٨	١٠	١١	١٣	١٥
٤٤٤٠	٤٤٥٦	٢	٣	٥	٦	٨	٩	١١	١٣	١٤
٤٥٩٤	٤٦٠٩	٢	٣	٥	٦	٨	٩	١١	١٢	١٤
٤٧٤٣	٤٧٥٧	١	٣	٤	٦	٧	٩	١٠	١٢	١٣
٤٨٨٦	٤٩٠٠	١	٣	٤	٦	٧	٩	١٠	١١	١٣
٥٠٢٤	٥٠٣٨	١	٣	٤	٦	٧	٨	١٠	١١	١٢
٥١٥٩	٥١٧٢	١	٣	٤	٥	٧	٨	٩	١١	١٢
٥٢٨٩	٥٣٠٢	١	٣	٤	٥	٦	٨	٩	١٠	١٢
٥٤١٦	٥٤٢٨	١	٣	٤	٥	٦	٨	٩	١٠	١١

لوغاريتمات الاعداد لأربعة أرقام عشرية

العدد	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧
٣٥	٥٤٤١	٥٤٥٣	٥٤٦٥	٥٤٧٨	٥٤٩	٥٥٠٢	٥٥١٤	٥٥٢٧
٣٦	٥٥٦٣	٥٥٧٥	٥٥٨٧	٥٥٩٩	٥٦١١	٥٦٢٣	٥٦٣٥	٥٦٤٧
٣٧	٥٦٨٢	٥٦٩٤	٥٧٠٥	٥٧١٧	٥٧٢	٥٧٤٠	٥٧٥٢	٥٧٦٣
٣٨	٥٧٩٨	٥٨٠٩	٥٨٢١	٥٨٣٢	٥٨٤	٥٨٥٥	٥٨٦٦	٥٨٧٧
٣٩	٥٩١١	٥٩٢٢	٥٩٣٣	٥٩٤٤	٥٩٥	٥٩٦٦	٥٩٧٧	٥٩٨٨
٤٠	٦٠٢١	٦٠٣١	٦٠٤٢	٦٠٥٣	٦٠٦	٦٠٧٥	٦٠٨٥	٦٠٩٦
٤١	٦١٢٨	٦١٣٨	٦١٤٩	٦١٦٠	٦١٧	٦١٨٠	٦١٩١	٦٢٠١
٤٢	٦٢٣٢	٦٢٤٢	٦٢٥٣	٦٢٦٣	٦٢٧	٦٢٨٤	٦٢٩٤	٦٣٠٤
٤٣	٦٣٣٥	٦٣٤٥	٦٣٥٥	٦٣٦٥	٦٣٧٠	٦٣٨٥	٦٣٩٥	٦٤٠٥
٤٤	٦٤٣٥	٦٤٤٤	٦٤٥٤	٦٤٦٤	٦٤٧	٦٤٨٤	٦٤٩٣	٦٥٠٣
٤٥	٦٥٣٢	٦٥٤٢	٦٥٥١	٦٥٦١	٦٥٧	٦٥٨٠	٦٥٩٠	٦٥٩٩
٤٦	٦٦٢٨	٦٦٣٧	٦٦٤٦	٦٦٥٦	٦٦٦	٦٦٧٥	٦٦٨٤	٦٦٩٣
٤٧	٦٧٢١	٦٧٣٠	٦٧٣٩	٦٧٤٩	٦٧٥	٦٧٦٧	٦٧٧٦	٦٧٨٥
٤٨	٦٨١٢	٦٨٢١	٦٨٣٠	٦٨٣٩	٦٨٤	٦٨٥٧	٦٨٦٦	٦٨٧٥
٤٩	٦٩٠٢	٦٩١١	٦٩٢٠	٦٩٢٨	٦٩٣	٦٩٤٦	٦٩٥٥	٦٩٦٤
٥٠	٦٩٩٠	٦٩٩٨	٧٠٠٧	٧٠١٦	٧٠٢٤	٧٠٣٣	٧٠٤٢	٧٠٥٠
٥١	٧٠٧٦	٧٠٨٤	٧٠٩٣	٧١٠١	٧١١٠	٧١١٨	٧١٢٦	٧١٣٥
٥٢	٧١٦٠	٧١٦٨	٧١٧٧	٧١٨٥	٧١٩	٧٢٠٢	٧٢١٠	٧٢١٨
٥٣	٧٢٤٣	٧٢٥١	٧٢٥٩	٧٢٦٧	٧٢٧	٧٢٨٤	٧٢٩٢	٧٣٠٠
٥٤	٧٣٢٤	٧٣٣٢	٧٣٤٠	٧٣٤٨	٧٣٥	٧٣٦٤	٧٣٧٢	٧٣٨٠
٥٥	٧٤٠٤	٧٤١٢	٧٤١٩	٧٤٢٧	٧٤٣	٧٤٤٣	٧٤٥١	٧٤٥٩
٥٦	٧٤٨٢	٧٤٩٠	٧٤٩٧	٧٥٠٥	٧٥١١	٧٥٢٠	٧٥٢٨	٧٥٣٦
٥٧	٧٥٥٩	٧٥٦٦	٧٥٧٤	٧٥٨٢	٧٥٨٩	٧٥٩٧	٧٦٠٤	٧٦١٢
٥٨	٧٦٣٤	٧٦٤٢	٧٦٤٩	٧٦٥٧	٧٦٦٤	٧٦٧٢	٧٦٧٩	٧٦٨٦
٥٩	٧٧٠٩	٧٧١٦	٧٧٢٣	٧٧٣١	٧٧٣	٧٧٤٥	٧٧٥٢	٧٧٦٠

٨	٩	الفروق								
		١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
٥٥٣٩	٥٥٥١	١	٢	٤	٥	٦	٧	٨	١٠	١١
٥٦٥٨	٥٦٧٠	١	٢	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
٥٧٧٥	٥٧٨٦	١	٢	٣	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
٥٨٨٨	٥٨٩٩	١	٢	٣	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
٥٩٩٩	٦٠١٠	١	٢	٣	٤	٥	٧	٨	٩	١٠
٦١٠٧	٦١١٧	١	٢	٣	٤	٥	٦	٨	٩	١٠
٦٢١٢	٦٢٢٢	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
٦٣١٤	٦٣٢٥	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
٦٤١٥	٦٤٢٥	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
٦٥١٣	٦٥٢٢	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
٦٦٠٩	٦٦١٨	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
٦٧٠٢	٦٧١٢	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٧	٨
٦٧٩٤	٦٨٠٣	١	٢	٣	٤	٥	٥	٦	٧	٨
٦٨٨٤	٦٨٩٣	١	٢	٣	٤	٤	٥	٦	٧	٨
٦٩٧٢	٦٩٨١	١	٢	٣	٤	٤	٥	٦	٧	٨
٧٠٥٩	٧٠٦٧	١	٢	٣	٣	٤	٥	٦	٧	٨
٧١٤٣	٧١٥٢	١	٢	٣	٣	٤	٥	٦	٧	٨
٧٢٢٦	٧٢٣٥	١	٢	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٧
٧٣٠٨	٧٣١٦	١	٢	٢	٣	٤	٥	٦	٦	٧
٧٣٨٨	٧٣٩٦	١	٢	٢	٣	٤	٥	٦	٦	٧
٧٤٦٦	٧٤٧٤	١	٢	٢	٣	٤	٥	٥	٦	٧
٧٥٤٣	٧٥٥١	١	٢	٢	٣	٤	٥	٥	٦	٧
٧٦١٩	٧٦٢٧	١	٢	٢	٣	٤	٥	٥	٦	٧
٧٦٩٤	٧٧٠١	١	١	٢	٣	٤	٤	٥	٦	٧
٧٧٦٧	٧٧٧٤	١	١	٢	٣	٤	٤	٥	٦	٦

لوغاريتمات الاعداد لأربعة أرقام عشرية

العدد	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧
٦٠	٧٧٨٢	٧٧٨٩	٧٧٩٦	٧٨٠٣	٧٨١٠	٧٨١٨	٧٨٢٥	٧٨٣٢
٦١	٧٨٥٣	٧٨٦٠	٧٨٦٨	٧٨٧٥	٧٨٨٢	٧٨٨٩	٧٨٩٦	٧٩٠٣
٦٢	٧٩٢٤	٧٩٣١	٧٩٣٨	٧٩٤٥	٧٩٥٢	٧٩٥٩	٧٩٦٦	٧٩٧٣
٦٣	٧٩٩٣	٨٠٠٠	٨٠٠٧	٨٠١٤	٨٠٢١	٨٠٢٨	٨٠٣٥	٨٠٤١
٦٤	٨٠٦٢	٨٠٦٩	٨٠٧٥	٨٠٨٢	٨٠٨٩	٨٠٩٦	٨١٠٢	٨١٠٩
٦٥	٨١٢٩	٨١٣٦	٨١٤٢	٨١٤٩	٨١٥٦	٨١٦٢	٨١٦٩	٨١٧٦
٦٦	٨١٩٥	٨٢٠٢	٨٢٠٩	٨٢١٥	٨٢٢٢	٨٢٢٨	٨٢٣٥	٨٢٤١
٦٧	٨٢٦١	٨٢٦٧	٨٢٧٤	٨٢٨٠	٨٢٨٧	٨٢٩٣	٨٨٩٩	٨٣٠٦
٦٨	٨٣٢٥	٨٣٣١	٨٩٣٨	٨٣٤٤	٨٣٥١	٨٣٥٧	٨٣٦٣	٨٣٧٠
٦٩	٨٣٨٨	٨٣٩٥	٨٤٠١	٨٤٠٧	٨٤١٤	٨٤٢٠	٨٤٢٦	٨٤٣٢
٧٠	٨٤٥١	٨٤٥٧	٨٤٦٣	٨٤٧٠	٨٤٧٦	٨٤٨٢	٨٤٨٨	٨٤٩٤
٧١	٨٥١٣	٨٥١٩	٨٥٢٥	٨٥٣١	٨٥٣٧	٨٥٤٣	٨٥٤٩	٨٥٥٥
٧٢	٨٥٧٣	٨٥٧٩	٨٥٨٥	٨٥٩١	٨٥٩٧	٨٦٠٣	٨٦٠٩	٨٦١٥
٧٣	٨٦٣٣	٨٦٣٩	٨٦٤٥	٨٦٥١	٨٦٥٧	٨٦٦٣	٨٦٦٩	٨٦٧٥
٧٤	٨٦٩٢	٨٦٩٨	٨٧٠٤	٨٧١٠	٨٧١٦	٨٧٢٢	٨٧٢٧	٨٧٣٣
٧٥	٨٧٥١	٨٧٥٦	٨٧٦٢	٨٧٦٨	٨٧٧٤	٨٧٧٩	٨٧٨٥	٨٧٩١
٧٦	٨٨٠٨	٨٨١٤	٨٨٢٠	٨٨٢٥	٨٨٣١	٨٨٣٧	٨٨٤٢	٨٨٤٨
٧٧	٨٨٦٥	٨٨٧١	٨٨٧٦	٨٨٨٢	٨٨٨٧	٨٨٩٣	٨٨٩٩	٨٩٠٤
٧٨	٨٩٢١	٨٩٢٧	٨٩٣٢	٨٩٣٨	٨٩٤٣	٨٩٤٩	٨٩٥٤	٨٩٦٠
٧٩	٨٩٧٦	٨٩٨٢	٨٩٨٧	٨٩٩٣	٨٩٩٨	٩٠٠٤	٩٠٠٩	٩٠١٥
٨٠	٩٠٣١	٩٠٣٦	٩٠٤٢	٩٠٤٧	٩٠٥٣	٩٠٥٨	٩٠٦٣	٩٠٦٩
٨١	٩٠٨٥	٩٠٩٠	٩٠٩٦	٩١٠١	٩١٠٦	٩١١٢	٩١١٧	٩١٢٢
٨٢	٩١٣٨	٩١٤٣	٩١٤٩	٩١٥٤	٩١٥٩	٩١٦٥	٩١٧٠	٩١٧٥
٨٣	٩١٩١	٩١٩٦	٩٢٠١	٩٢٠٦	٩٢١٢	٩٢١٧	٩٢٢٢	٩٢٢٧
٨٤	٩٢٤٣	٩٢٤٨	٩٢٥٣	٩٢٥٨	٩٢٦٣	٩٢٦٩	٩٢٧٤	٩٢٧٩

(تابع) لوغاريتمات الأعداد لأربعة أرقام عشرية

٨	٩	الفروق ١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
٧٨٣٩	٧٨٤٦	١	١	٢	٣	٤	٤	٥	٦	٦
٧٩١٠	٧٩١٧	١	١	٢	٣	٤	٤	٥	٦	٦
٧٩٨٠	٧٩٨٧	١	١	٢	٣	٣	٤	٥	٦	٦
٨٠٤٨	٨٠٥٥	١	١	٢	٣	٣	٤	٥	٥	٦
٨١١٦	٨١٢٢	١	١	٢	٣	٣	٤	٥	٦	٦
٨١٨٢	٨١٨٩	١	١	٢	٣	٣	٤	٥	٥	٦
٨٢٤٨	٨٢٥٤	١	١	٢	٣	٣	٤	٥	٥	٦
٨٣١٢	٨٣١٩	١	١	٢	٣	٣	٤	٥	٥	٦
٨٣٧٦	٨٣٨٢	١	١	٢	٣	٣	٤	٤	٥	٦
٨٤٣٩	٨٤٤٥	١	١	٢	٢	٣	٤	٤	٥	٦
٨٥٠٠	٨٥٠٦	١	١	٢	٢	٣	٤	٤	٥	٦
٨٥٦١	٨٥٦٧	١	١	٢	٢	٣	٤	٤	٥	٥
٨٦٢١	٨٦٢٧	١	١	٢	٢	٣	٤	٤	٥	٥
٨٦٨١	٨٦٨٦	١	١	٢	٢	٣	٤	٤	٥	٥
٨٧٣٩	٨٧٤٥	١	١	٢	٢	٣	٤	٤	٥	٥
٨٧٩٧	٨٨٠٢	١	١	٢	٢	٣	٣	٤	٥	٥
٨٨٥٤	٨٨٥٩	١	١	٢	٢	٣	٣	٤	٥	٥
٨٩١٠	٨٩١٥	١	١	٢	٢	٣	٣	٤	٤	٥
٨٩٦٥	٨٩٧١	١	١	٢	٢	٣	٣	٤	٤	٥
٩٠٢٠	٩٠٢٥	١	١	٢	٢	٣	٣	٤	٤	٥
٩٠٧٤	٩٠٧٩	١	١	٢	٢	٣	٣	٤	٤	٥
٩١٢٨	٩١٣٣	١	١	٢	٢	٣	٣	٤	٤	٥
٩١٨٠	٩١٨٦	١	١	٢	٢	٣	٣	٤	٤	٥
٩٢٣٢	٩٢٣٨	١	١	٢	٢	٣	٣	٤	٤	٥
٩٢٨٤	٩٢٨٩	١	١	٢	٢	٣	٣	٤	٤	٥

لوغاريتمات الأعداد لأربعة أرقام عشرية

العدد	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧
٨٥	٩٢٩٤	٩٢٩٩	٩٣٠٤	٩٣٠٩	٩٣١٥	٩٣٢٠	٩٣٢٥	٩٣٣٠
٨٦	٩٣٤٥	٩٣٥٠	٩٣٥٥	٩٣٦٠	٩٣٦٥	٩٣٧٠	٩٣٧٥	٩٣٨٠
٨٧	٩٣٩٥	٩٤٠٠	٩٤٠٥	٩٤١٠	٩٤١٥	٩٤٢٠	٩٤٢٥	٩٤٣٠
٨٨	٩٤٤٥	٩٤٥٠	٩٤٥٥	٩٤٦٠	٩٤٦٥	٩٤٦٩	٩٤٧٤	٩٤٧٩
٨٩	٩٤٩٤	٩٤٩٩	٩٥٠٤	٩٥٠٩	٩٥١٣	٩٥١٨	٩٥٢٣	٩٥٢٨
٩٠	٩٥٤٢	٩٥٤٧	٩٥٥٢	٩٥٥٧	٩٥٦٢	٩٥٦٦	٩٥٧١	٩٥٧٦
٩١	٩٥٩٠	٩٦٩٥	٩٦٠٠	٩٦٠٥	٩٦٠٩	٩٦١٤	٩٦١٩	٩٦٢٤
٩٢	٩٦٣٨	٩٦٤٣	٩٦٤٧	٩٦٥٢	٩٦٥٧	٩٦٦١	٩٦٦٦	٩٦٧١
٩٣	٩٦٨٥	٩٦٨٩	٩٦٩٤	٩٦٩٩	٩٧ ٣	٩٧٠٨	٩٧١٣	٩٧١٧
٩٤	٩٧٣١	٩٧٣٦	٩٧٤١	٩٧٤٥	٩٧٥٠	٩٧٥٤	٩٧٥٩	٩٧٦٣
٩٥	٩٧٧٧	٩٧٨٢	٩٧٨٦	٩٧٩١	٩٧٩٥	٩٨٠٠	٩٨٠٥	٩٨٠٩
٩٦	٩٨٢٣	٩٨٢٧	٩٨٣٢	٩٨٣٦	٩٨٤١	٩٨٤٥	٩٨٥٠	٩٨٥٤
٩٧	٩٨٦٨	٩٨٧٢	٩٨٧٧	٩٨٨١	٩٨٨٦	٩٨٩٠	٩٨٩٤	٩٨٩٩
٩٨	٩٩١٢	٩٩١٧	٩٩٢١	٩٩٢٦	٩٩٣٠	٩٩٣٤	٩٩٣٩	٩٩٤٣
٩٩	٩٩٥٦	٩٩٦١	٩٩٦٥	٩٩٦٩	٩٩٧٤	٩٩٧٨	٩٩٨٣	٩٩٨٧
١٠٠	٠٠٠٠	٠٠٠٤	٠٠٠٩	٠٠١٣	٠٠١٧	٠٠٢٢	٠٠٢٦	٠٠٣٠
١٠١	٠٠٤٣	٠٠٤٧	٠٠٥٢	٠٠٥٦	٠٠٦٠	٠٠٦٥	٠٠٦٩	٠٠٧٣
١٠٢	٠٠٨٦	٠٠٩٠	٠٠٩٥	٠٠٩٩	٠١٠٣	٠١٠٧	٠١١١	٠١١٦
١٠٣	٠١٢٨	٠١٣٣	٠١٣٧	٠١٤١	٠١٤٥	٠١٤٩	٠١٥٤	٠١٥٨
١٠٤	٠١٧٠	٠١٧٤	٠١٧٩	٠١٨٣	٠١٨٧	٠١٩١	٠١٩٥	٠١٩٩
١٠٥	٠٢١٢	٠٢١٦	٠٢٢٠	٠٢٢٤	٠٢٢٨	٠٢٣٣	٠٢٣٧	٠٢٤١
١٠٦	٠٢٥٣	٠٢٥٧	٠٢٦١	٠٢٦٥	٠٢٦٩	٠٢٧٣	٠٢٧٨	٠٢٨٢
١٠٧	٠٢٩٤	٠٢٩٨	٠٣٠٢	٠٣٠٦	٠٣١	٠٣١٤	٠٣١٨	٠٣٢٢
١٠٨	٠٣٣٤	٠٣٣٨	٠٣٤٢	٠٣٤٦	٠٣٥	٠٣٥٤	٠٣٥٨	٠٣٦٢
١٠٩	٠٣٧٤	٠٣٧٨	٠٣٨٢	٠٣٨٦	٠٣٩	٠٣٩٤	٠٣٩٨	٠٤٠٢

٨	٩	الفروق ١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
٩٣٣٥	٩٣٤٠	١	١	٢	٢	٣	٣	٤	٤	٥
٩٣٨٥	٩٣٩٠	١	١	٢	٢	٣	٣	٤	٤	٥
٩٤٣٥	٩٤٤٠	٠	١	١	٢	٢	٣	٣	٤	٤
٩٤٨٤	٩٤٨٩	٠	١	١	٢	٢	٣	٣	٤	٤
٩٥٣٣	٩٥٣٨	٠	١	١	٢	٢	٣	٣	٤	٤
٩٥٨١	٩٥٨٦	٠	١	١	٢	٢	٣	٣	٤	٤
٩٦٢٨	٩٦٣٣	٠	١	١	٢	٢	٣	٣	٤	٤
٩٦٧٥	٩٦٨٠	٠	١	١	٢	٢	٣	٣	٤	٤
٩٧٢٢	٩٧٢٧	٠	١	١	٢	٢	٣	٣	٤	٤
٩٧٦٨	٩٧٧٣	٠	١	١	٢	٢	٣	٣	٤	٤
٩٨١٤	٩٨١٨	٠	١	١	٢	٢	٣	٣	٤	٤
٩٨٥٩	٩٨٦٣	٠	١	١	٢	٢	٣	٣	٤	٤
٩٩٠٣	٩٩٠٨	٠	١	١	٢	٢	٣	٣	٤	٤
٩٩٤٨	٩٩٥٢	٠	١	١	٢	٢	٣	٣	٤	٤
٩٩٩١	٩٩٩٦	٠	١	١	٢	٢	٣	٣	٣	٤
٠٠٣٥	٠٠٣٩									
٠٠٧٧	٠٠٨٢									
٠١٢٠	٠١٢٤									
٠١٦٢	٠١٦٦									
٠٢٠٤	٠٢٠٨									
٠٢٤٥	٠٢٤٩									
٠٢٨٦	٠٢٩٠									
٠٣٢٦	٠٣٣٠									
٠٣٦٦	٠٣٧٠									
٠٤٠٦	٠٤١٠									

اعداد عشوائية

٤٥ ٠٩ ٧٣ ٢٧ ٨١	٣٠ ٨٠ ٠٥ ٢٦ ٢٨	٥١ ٧٥ ٩١ [illegible]	[illegible]
٨٣ ٩٥ ٢٤ ١٥ ٠٧	٦٢ ٩٥ ٣١٦٠٤	٨٦ ٢٠ ٠٨ ١[illegible]	٦٢ ٢٨ ٠٢ ٤٦ ٩٣
٨٣ ٩٨ ٢٢ ٠٣ ٢٢	٢٨ ٩٩ ٠٨ ٤٩ ٦٦	١٢ ٣٦ ٣٥ ٦٧ [illegible]	١٩ ١٦ ٤٥ ٤٤ ٢٧
٠٨ ٤٤ ٢٣ ٩٠ ٠٦	٤٣ ٧٧ ٠٦ ٦٠ ٢٧	٩٧ ٤٦ ٣٧ ٠[illegible]	٢٥ ٨٢ ١٥ ٦٢ ٩٤
٧٥ ٩٦ ٦١ ٢٥ ٩٥	٠٧٧٨ ٧٨٥٧٥	١١ ١٤ ٠٢ ٢[illegible]	٢٩ ٨٤ [illegible] ٢١ ٠٦
٠٨ ٨٢ ٩٣ ١٠ ٩٢	٩١ ٥٦ ٠٠ ٧١ ٣٩	٠٠ ٩٠ ٢٧ [illegible]	[illegible]
٣٨ ٢٠ ٤١ ٦٨ ٠٨	٢٨ ٩٦ ٠٩ ٦٧ ٣٨	٠٨ ٠٦ ٤٢ ٩١ [illegible]	٤١ ٤١ ٧٢ ٠٢ ٦٩
٣٢ ٦٣ ٤٨ ٨٦ ٣١	٢٨ ٥٥ ١٥ ٩٣ ٩٧	٠٦ ٩١ ٤٩ ٦٢ [illegible]	[illegible]
٤٢ ٠٥ ٨٠ ٣٨ ٠٩	٤٧ ١٧ ٠٢ ٨٧ ٨٦	١٤ ٥٨ ٥٢ [illegible]	[illegible]
٧٦ ٧٠ ٤٠ ٤٨ ٤٠	٢٨ ٩٥ ٠٧ ٨٩ ٧٥	٥٧ ٤٤ ٩٤ ٦٠ [illegible]	٦٦ ٩٢ [illegible] ٧٤ ٢٤
٩٠ ٠٠ ٤٣ ٨٥ ٣٩	٥٧ ٢٨ ١٩ ٢١ ٠٨	٣٩ ٠٤ ٢٦ ٠٢ [illegible]	١٥ ٤٨ ٥٦ ٢٣ ٨٣
٨١ ٧٨ ٤٩ ٩٨ ٣٤	١١ ٨٧ ١٢ ٤٥ ٥٣	٣٦ ١٣ ٢٨ ٧٤ ٠[illegible]	٨١ ٨٢ ٢١ ٥٩ ٠٨
١٥ ٩٤ ٦٩ ٣٧ ٦٩	٨٩ ٥٣ ٨٠ ٩٥ ٨٢	٠٣ ٨٢ ٤٣ ٠٠ ١[illegible]	٣٤ ٨٩ ٣٥ ٠٦ ٧٩
٠١ ٩٦ ٥٠ ٨٩ ٩٩	٧١ ٥٧ ٠٢ ٠١ ٦٤	٦٨ ٣٠ ٥٧ ١[illegible]	٧٤ ١٢ ٩٤ ٤٤ ٤٦
٩١ ٢٢ ٤٩ ٦٧ ٩٤	٧٨ ٠٦ ٢٥ ٢٠ ٥٠	٨٥ ٢٢ ٢٩ ٨١ [illegible]	٨٧ ٠٧ ٨٠ ٣٠ ٥٢
١٧ ٨٠ ٤٧ ٧٥ ٠٩	١١ ١٦ ٥٤ ٠٢ ٨٠	٠١ ١٠ ٦٠ ٩٩ ٠[illegible]	٦٥ ٥٧ ٠٧ ٨٥ ٦٦
٢٢ ٢٨ ٥٩ ٤٣ ٢٣	٩٦ ٥٩ ٦١ ٢٠ ١٠	٢٧ ٤٤ ٨٦ ٥٩ [illegible]	٤٦ ٥٤ ٠٠ ٤٠ ٠٥
٧٦ ٩٧ ٩٤ ٣٩ ٩٣	١٩ ٤٩ ٤١ ٩٥ ١٨	٤٤ ٣١ ٥٨ ١٤ [illegible]	٤٦ ٩٤ ٦٦ ٩٦ ٥٧
٩٨ ١٨ ٤٩ ٢١ ٩٧	١٨ ٤١ ٤٣ ٥٨ ٤٠	٥١ ٧٦ ٤٤ ٧٢ ٧[illegible]	٢٥ ٣٠ ٦٥ ٢٨ ١٦
٩٤ ٨١ ٣١ ٦١ ١٢	٥٤ ٢٣ ٥[illegible] ٣٦ ٥٥	٥٢ ٣٢ ٤٠ ٠٦ ٢[illegible]	٠٦ ٧٩ ٥٦ ٥٢ ٥١
٨٩ ٦٣ ٩٠ ٣٧ ٤١	٧٩ ٤٩ ٥٤ ٨١ ٩٨	٠٦ ٦٦ ٩٤ ١٥ ٤[illegible]	٣٣ ٩٧ ٤٣ ٢١ ٤٤
٦٤ ٢٨ ٦٩ ٥٤ ٧٢	٢٣ ٠٢ ٦[illegible] ٩١ ٣٥	٠٧ ٨١ ٦٤ ٨٠ [illegible]	٦٠ ٠٩ ٤٨ ٧٧ ٨٦
٢٨ ١٠ ٧٦ ٤٢ ٢٩	٤٣ ٩٧ ٠[illegible] ٥٢ ٨٢	٨٩ ٩٤ ٧٩ ٨٤ ٥	٤٩ ٤١ ٩٥ ٩٠ ١٥
٢٣ ٦٧ ٣٢ ٥٠ ٦٣	٣٦ ٧١ ٢[illegible] ٦٧ ٣٩	٦٤ ٧٢ ٩١ ٢٥ ٨[illegible]	٦٧ ٢١ ٠٤ ٨٤ ٢٣
٤١ ٠٨ ٣٢ ٦٠ ٠٤	١٢ ٤٠ ٠[illegible] ٦٦ ٤٦	٢٤ ٢٤ ٢٦ ٢٧ ٠[illegible]	٤٢ ٩٣ ٧٦ ٢٥ ٠٧

اعداد عشوائية

٣٢ ٥٢ ٤٠ ٥٣ ٣٨	٢٢ ٩٨ ٧٢ ٥٣ ٧٠	٥٣ ١٤ ٢١ ٦١ ٣٠	٠٠ ٦٠ ٨٤ ٩٢ ١٧
٠٨ ٩٥ ٧٥ ٩٧ ١٩	٤٨ ٧٩ ٨٤ ٦٩ ٠٦	٠١ ٤٦ ٧١ ٦١ ٠٧	٣٥ ١٢ ٧٤ ٢١ ١٥
٤٢ ١٠ ١٤ ١٤ ٤٢	٨١ ٩٤ ٩٧ ٨١ ٣٤	٦٣ ٧٧ ٥٦ ٨٠ ٢٢	٥٤ ١٥ ٧٥ ٠٢ ٠١
٤٩ ٠٢ ٥٣ ٠٢ ٠٠	٥٩ ٣٣ ٤٢ ٠٣ ١٠	٠٨ ١٢ ٦٦ ٢٥ ٩٧	١٩ ٦٢ ٤٧ ١٩ ٨٨
٧٦ ٥٦ ٩٤ ٣٧ ٣٠	٧٣ ٩٠ ٥٧ ٨٨ ٣٤	١٧ ٤٤ ٦٦ ٤٢ ١٨	٦٩ ٧٧ ١٦ ٧٢ ٧٣
٠٢ ٤٦ ٢٠ ٩٨ ٤٧	٨٧ ١٠ ٠٨ ٦٤ ١٨	٣٨ ١١ ٠٧ ١٤ ٢٦	٠٦ ٧٦ ٦٤ ٦١ ٢٧
٢٩ ٨٦ ٥٦ ٢١ ٢٧	٨١ ٩٠ ٨٩ ٦٠ ٥١	٣٣ ١٥ ٨٤ ٦٧ ٧٠	٤٠ ٠٠ ٤٢ ٢٠ ٣٥
٩٦ ٢٩ ٥٥ ٣٩ ٦٨	٦٣ ٤٠ ٠٣ ٧٧ ٤٨	١٧ ٥٢ ٩٩ ٩٥ ٨٩	٢٦ ٧٩ ٤٢ ٦٧ ٦٥
١٨ ٦٨ ١٤ ٨٥ ١٨	٢١ ٢٣ ٠٦ ٢١ ٦٧	٧٠ ٥٠ ٨٥ ٥٢ ٧٥	٥٢ ٨٣ ١٧ ٧٥ ٢٦
٩٦ ٦٥ ١٨ ٧٩ ٦٨	٢٠ ٣٠ ٥٠ ١٨ ٨٨	٠٥ ١٦ ٨٧ ٢٣ ٤٤	٥٣ ٧٨ ٢٣ ٩٣ ٦٣
٤١ ٧١ ٩٨ ٤٢ ٥٩	٦٩ ٠٤ ١٩ ٧٥ ٣٠	٨٦ ٧٨ ٦٤ ٣٦ ٥٣	٥٤ ٢٠ ٥٢ ٨٥ ٨٤
٩٩ ٠٨ ٨٦ ١٠ ١٧	٢٨ ٦٥ ٩٧ ٧٢ ٣١	٢٩ ٣٩ ٣٨ ٧١ ٠٣	٤٩ ٨٣ ٣١ ٧٩ ٢٤
٠٨ ٢١ ٦٩ ٣٩ ٣٠	٧١ ٩٢ ٨٥ ٤٧ ٤٥	١١ ٥٩ ٩٥ ٤٠ ٤٢	٤٦ ٩٤ ١٣ ٠٥ ٣٧
١٦ ٦٤ ٨٩ ١٥ ٦٦	١٣ ٦٧ ٠٢ ٠٩ ٨٥	٠٢ ٢٦ ٥٤ ٥٢ ٦٢	٢٢ ٠١ ٩١ ٦٠ ٧٧
٢٣ ٠٦ ٧٩ ٨١ ٢٧	٧٥ ٣٨ ٦٠ ٠٤ ٤٦	٩٩ ١٧ ٠١ [illegible] ٢٦	٨١ ٩٤ ٨١ ٣٨ ٠٩
٣٢ ٦٢ ٢٣ ٠١ ٠٤	٨٩ ٠٩ ٧٠ ١٦ ٠٣	٣٨ ٧٢ ٥٧ ٦٧ ٥٣	٤٧ ١١ ١٢ ١٩ ٣١
٤٥ ٨٤ ٩٢ ٥٦ ٧٩	٦٠ ١٣ ٢٣ ٩٢ ٩٦	٣٣ ٦٩ ٦٠ ٩٠ ٢٩	٥٣ ٧٤ ٥٢ ٢٣ ٨٨
٤٥ ٧٣ ٧٦ ٢٩ ٣٦	٦٣ ٨٢ ٣٨ ٧٤ ٤٤	٠٤ ٣٣ ٦٨ ٧٨ ٣٦	٦٩ ٧٨ ٩٠ ٧١ ٤٢
٠٢ ٨٢ ٣١ ٩١ ٧٩	٠٤ ٥٨ ٣٢ ٢٤ ٠٥	٣٣ ٨٧ ٧٥ ٥٢ ٠٤	٢٨ ٢٧ ٢٦ ٣٠ ٢٥
٣٣ ٤٤ ٩٧ ٩٠ ١٧	٢٧ ٩٤ ٨٤ ٣٨ ١٧	٠١ ٦٠ ٩٠ ٢٩ ٣٥	٢٨ ٨٠ ٨٤ ٩٤ ٢٤
١٢ ٥٦ ٧٣ ٩٦ ٦٥	٦٥ ٧٩ ١٢ ٢١ ٥١	٨٤ ٨٨ ٣٧ ٠٩ ١٥	٢٧ ٩٠ ٥٩ ٨٩ ٣٣
٥٥ ٠١ ٤٤ ٩٧ ٣٦	٥٤ ٣٠ ١٦ ٦٢ ٢٩	١٨ ٠٥ ٧١ ٢١ ٤٤	٨٣ ٣٤ ٠٠ ١٢ ٧٨
٦٤ ٦٠ ٥٣ ٠٦ ٩٥	١١ ٥٢ ٢١ ٧٦ ٢٥	٩٠ ٤٣ ٤٦ ٩٤ ٤٥	٧٥ ٠٥ ٤٩ ٠٦ ٤٨
٣٦ ٢٦ ٣٩ ٢٩ ٧٠	٤٥ ٧٢ ٦٠ ٣٠ ١٦	٨٩ ٠٠ ٧٤ ٤٠ ١٨	٠٩ ٤٠ ٢٠ ٣٤ ٥٦
٢٧ ٢٢ ٧٤ ٨٤ ٤٠	٨٣ ٩٩ ١٧ ١٧ ٤٨	١٠ ٤٧ ٩٤ ٢٠ ٤٣	٩٢ ١٦ ٠٩ ٦٨ ٤١

اعداد عشوائية

٧٦ ٦٦ ٢٧ ٠١ ١٢	٩٦ ٤٠ ٠٢ ٢٢ ٣٦	١١ ٤٠ ٨١ ١٠ ٨٣	٨٦ ٢٣ ٤٢ ٢٣ ٣١
٥٨ ٦٦ ٥٤ ٨٤ ٩٧	٥٨ ٢٠ ٣٠ ٩٩ ٣٤	٣٦ ٧٥ ٣١ ٥٧ ٩٥	٤٨ ٣٨ ٩٦ ٦١ ٤٤
٦٣ ١٦ ٥٥ ٥٩ ٤٤	٤٠ ٦٣ ٣٤ ١٩ ٧١	٣٩ ٠٢ ٠٢ ٩٩ ٥٢	٩٧ ٨٢ ٦٩ ٩٩ ٩٦
٠٤ ١٧ ٩٧ ٩٠ ٠٢	٤٥ ٧٩ ١٦ ٥٤ ١٩	٠٠ ٧٦ ٣٧ ٠٧ ٩٤	٢١ ٠٣ ١٩ ٨٦ ٣٥
٧٣ ٠٤ ٥٢ ٤٨ ٩٣	٥٨ ٦٦ ٣٧ ٣٩ ٤٥	٧٨ ٥٩ ٤٩ ٧١ ٠١	٤٨ ٤١ ٧٦ ٦٢ ٩٥
٩١ ٠٠ ٥٥ ٧٤ ٤٧	٣١ ٩٨ ٩٨ ٧٨ ٧٨	٣٢ ٠٣ ٩٤ ٧٠ ٥٠	٢٦ ٨٦ ٦١ ٢٥ ٣٢
٧٠ ٦٦ ٤٦ ٢٤ ٠٦	٧١ ٤٢ ٥٧ ٨٩ ٧٩	٢٦ ١٧ ٥٧ ٥٨ ٥١	٦٨ ١٨ ٤٦ ٥٩ ٩٦
٠٣ ١٧ ٥٥ ٥٥ ٦٨	٣٨ ٠٩ ٩٣ ٤٤ ٦٧	٠٦ ٩٠ ٤٥ ٠٨ ٧٦	٥٥ ٥٦ ٤٥ ٥١ ٢٨
٨٧ ٧١ ٥٧ ٧١ ٧٥	٩٠ ١٦ ٧٩ ٠٢ ٣٧	٢٥ ٢٦ ٨٠ ٨٢ ٢٢	٩٨ ٨٣ ٤٥ ٧٤ ٥٧
٦٠ ٥٤ ١٦ ٠١ ٩٣	٤٠ ١١ ٤٠ ٤٤ ٠٩	٠٩ ٥٠ ٣٦ ٥٣ ٠٠	٢٥ ٤٨ ٩٣ ٢٧ ١٥
٢٥ ٠٦ ٦٥ ٨٧ ٦٤	٠٣ ٦٦ ٦٩ ٧٦ ٢١	٨٨ ٣٢ ٦٠ ٣٠ ٦٣	٦٥ ٢٤ ٤٥ ٥٩ ٠٨
٥٥ ٩٤ ٧٩ ٠٥ ٩٨	٩٣ ٢٦ ٣٧ ٢٨ ٦٥	٦٣ ٨٢ ٨٦ ٩٩ ١٣	١٤ ٦٢ ٧٨ ٨٦ ٥٧
٩٧ ٧٠ ٤٢ ٢٧ ٠٥	٣٩ ٤٣ ٩٥ ٧٤ ٩٠	٩٦ ٦٣ ٠٠ ٦٩ ٦٣	٣٨ ١٣ ٥٣ ٨٤ ١٥
٤٠ ٣٥ ٢٩ ٢٣ ١٥	٤٦ ٧٠ ٤١ ٥٩ ٨٦	٢٢ ٠٥ ٣٩ ١٨ ٥٢	٦٧ ٩٨ ٨٧ ٤٤ ٠٩
٦٣ [illegible] ٢ ٦٩	٢٠ ٣٥ ٦٤ ٠٦ ٨١	١٦ ٨٨ ٠١ ٩٤ ٢٥	٢٦ ٤٩ ٥٧ ٣٣ ٧٣
٤٠ ٢١ ١٧ ١٨ ٣٠	٨٢ ٦٢ ١٠ ١٦ ٧٥	٢٤ ٧٥ ٩٩ ٢٢ ٥١	٩٦ ٧٧ ٥٨ ٤٣ ٢٦
٣٧ ٣٩ ٨٦ ٨٠ ٥٦	٣٧ ٥٢ ٤١ ٥١ ٨٩	٧١ ٦١ ٠٧ ١٩ ٢٢	٥٤ ١٠ ٧٨ ٢٤ ٨٢
٣٧ ٨٥ ٥٨ ٩٥ ٤٥	٣٥ ٤٠ ٥٤ ٢٠ ٧٣	٤١ ٥٥ ٧٤ ٥٩ ٩٦	٩٧ ٠١ ١٠ ٥٩ ٠٢
٤٤ ٦٨ ٣٦ ٢٩ ٢٧	٩١ ٠٣ ٩٠ ٤٨ ٠٢	٠١ ٩١ ٦٦ ٦٦ ٦٣	٤٥ ٠٥ ٢٧ ٠١ ٣٤
٠٠ ٧٦ ١٠ ٢٠ ٤٢	٥٩ ١٠ ٣٢ ٣٢ ٤٠	٦٢ ٥٣ ٧٦ ٠٤ ١٨	٤٤ ٤٠ ٣٠ ٠٣ ١١
٦٤ ٨١ ٤٧ ٦٥ ٢٩	٥٠ ٩٧ ٨٠ ٠٥ ٦٠	٤٦ ٧٩ ٢٠ ٥٦ ١٩	٢٧ ١٨ ٢٤ ١٣ ٥٢
٢٤ ٦١ ٥١ ٨٢ ٩٦	٥٧ ٢٧ ٠٤ ٣٣ ٠١	٧٧ ٧٢ ٠٢ ١١ ٩٧	١٣ ٤٧ ٤٢ ٩٤ ٥٦
٤٢ ٩٠ ٧٩ ٤٢ ٦٥	٣٦ ٣٨ ١٠ ٣٧ ٥٩	١١ ٩٠ ٤٩ ٩٧ ٤٧	١٣ ١٧ ٧١ ٣٨ ٦٧
٨٢ ٠٥ ٦١ ١٧ ٤٧	٦٠ ٠٤ ٣٢ ٩٥ ٧٠	٧٩ ٥٣ ٣٤ ٩١ ٠٨	١٢ ٨٥ ٦٠ ٥٦ ٠٨
٨٧ ٥٦ ٨٣ ١٤ ٩٦	٢٦ ٧٥ ٣٣ ١٩ ٠١	٠٠ ١٥ ٧٣ ٢٦ ٥٤	٨٠ ٦٦ ٠٥ ٢٨ ٣٦

الفهـــرس

الموضـوع | ص

الموضـوع	ص
الفصل الرابع : تحليل البيانات الاحصائية	١٠٠
مقاييس النزعة المركزية (المتوسطات الاحصائية)	١٠١
المبحث الأول : الوسط الحسابى	١٠٣
المبحث الثانى : الوسيط	١٢٣
المبحث الثالث : المنوال	١٤١
المبحث الرابع : (العلاقة بين المتوسطات السابقة)	١٥٦
والمبحث الخامس : الوسط الهندسى	١٦٠
والمبحث السادس : الوسط التوافقى	١٦٨
الفصل الخامس : مقاييس التشتت	١٨٣
أولاً : (المدى ، الانحـراف الربيعى ، الإنحـراف المتـوسط الانحراف المعيارى)	
ثانياً : مقاييس التشتت النسبى	٢٠٩
معامل الاختلاف المعيارى	٢١٠
معامل الاختلاف الربيعى	٢١٥
منحنى لورنز	٢٢٠
الفصل السادس : الالتواء والعزوم والتفرطح	٢٢٩
الجـزء الأول : الإلتــواء	
معاملات الإلتـواء لبيرسـون ($ت_١$ ، $ت_٢$)	٢٣٢
معامل الإلتواء لباولى ($ت_٣$)	٢٣٣

الموضـوع ص

هذا الكتاب

نشأة وتطور ومجالات ومراحل علم الإحصاء

جمع البيانات والمعلومات الإحصائية

تصنيف وعرض البيانات الاحصائية

تحليل البيانات الاحصائية

مقاييس التشتت

الالتواء والعزوم والتفرطح

دراسة العلاقة بين متغيرين أو أكثر

الأرقام القياسية

السلاسل الزمنية (تحليل وقياس مكوناتها)





الدار الجامعية
٨٤ شارع زكريا غنيم
الابراهيمية - الاسكندرية ج.م.ع
ت/فاكس : ٥٩٠٧٤٦٦ - ٥٩١٧٨٨٢/ ٠٣/ ٢+
e-mail:m20ibrahim@yahoo.com